IV) LA INTEGRAL

1. *La integral indefinida*

Funciones primitivas

Definición. Sea f una función, se dice que F, función derivable, es una primitiva de f si se verifica F '=f

Ejemplo 1. Si f(x)= $3x^2$ una primitiva es F(x)= x^3. Otra G(x)= x^3+7

Proposición.1. Si F es una primitiva de f entonces F+C también lo es.

En efecto ya que (F+C)'=F'+C'= F' +0= f

Proposición.2. Si una función f tiene derivada nula en un intervalo entonces f es constante. (se admite sin demostración)

Teorema. Si F_1 y F_2 son primitivas de f, entonces se diferencian en una constante, es decir $F_1= F_2+C$

Demostración

Si F_1 es primitiva de f $\Rightarrow$ $F_1'(x)= f(x)$; si F_2 es primitiva de f $\Rightarrow$ $F_2'(x)= f(x)$

Luego $F_1'(x)- F_2'(x)= 0 \Rightarrow F_1-F_2= C$

Consecuencia. Dada una primitiva F de f, el conjunto de sus primitivas es F+C. A dicho conjunto se le llamará la integral indefinida de f y se escribirá $\int f$ ó $\int f(x)dx$.

A f(x) se le llama integrando y al símbolo $\int$, símbolo de integración.

Propiedades de la integral indefinida (Linealidad)

1) $\int f_1 + f_2 = \int f_1 + \int f_2$

Es consecuencia de que la derivada de la suma es la suma d las derivadas

2) $\int kf = k\int f$

Es consecuencia de que si F es primitiva de f $\Rightarrow$ kF es primitiva de kf, pues (kF)'= kF'= kf

2.*Integrales inmediatas*

Tabla de primitivas (hacerla teniendo en cuenta la de derivadas y su relación)

Integrales inmediatas (o casi inmediatas)

Llamamos así a aquellas que no requieren ningún método para encontrar una primitiva sino el simple reconocimiento de la función que se ha derivado.

Ejemplo 2. a) $\int \frac{1}{2+x}dx = \ln|2+x| + C$; b) $\int \frac{3}{1+x^2}dx = 3\,\mathrm{arctg}\,x$

Ejercicio 1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int \cos 5x dx$; b) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$; c) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$; d) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} dx$

3. *Métodos de Integración*

I). *Método de descomposición*

Se basa en la linealidad de la integral indefinida

Ejemplo.3 $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \mathbf{C}$

Ejercicio.2. Calcula $\int \frac{3+x}{1+x^2} dx$.

II*). Integración por partes.*

Se basa en la fórmula de la derivación de un producto.

(u.v)' = u'.v +v'.u $\Rightarrow \int u(x)v'(x)dx = \int (u(x).v(x))'\,dx - \int v(x)u'(x)dx$

Como $\int (u(x).v(x))'\,dx = u(x).v(x)$, se tiene:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

o utilizando diferenciales:

$$\boxed{\int udv = u.v - \int vdux}$$

Ejemplo 4. $\int x^2 \ln x dx$

Tomamos:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

de donde: $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

Ejercicio.3. Calcula $\int xe^x dx$

III) *Integración por sustitución o cambio de variable.*

Proposición. Si F es una primitiva de f y h(x)=F(u(x))

$$\Rightarrow \int f(u(x)).u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Demostración

Se basa en la regla de la cadena. Si F es primitiva de f $\Rightarrow$F'(x)=f(x) y h'(x)=F'(u(x)).u'(x) =f(u(x)).u'(x), usando la regla de la cadena, luego h(x) es una primitiva de f(u(x))u'(x).

Ejemplo 5. I=$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3-1)^2}}dx$.

Hacemos u=x^3-1 $\Rightarrow$ du=$3x^2$dx y sustituyendo

I=$\int \frac{du}{3\sqrt{1-u^2}} = \frac{\operatorname{arcsen} u}{3} = \frac{\operatorname{arcsen}(x^3-1)}{3} + C$

Ejercicio 4. Calcula $\int \frac{x^3}{x^4+3}dx$

Nota. Teniendo en cuenta la proposición anterior se puede ampliar la tabla de derivadas a funciones compuestas (hacerlo)

Ejemplo 6. $\int 2x\cos(x^2+1)dx = \operatorname{sen}(x^2+1)+C$

Ejercicio 5. Calcula $\int x^2 e^{x^3}dx$

IV). *Integración de funciones racionales*

Son de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde P y Q son polinomios.

El método para calcular este tipo de integrales supone que el grado del numerador es menor que el del denominador, luego en primer lugar, si esto no ocurre hay que hacer la división.

$P(x) = h(x)Q(x) + R(x)$, es decir $\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ y como

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int h(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$, el problema queda reducido al de calcular $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$, y aquí siempre se verifica grad R(x)< grad Q(x)

Ejemplo 7. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int 1dx + \int \frac{2}{x^2-1}dx$

Nota. Estudiaremos únicamente el caso en que el denominador tiene todas las *raíces reales y distintas.*

Si x_1, x_2, ...x_n son las raíces de Q(x) se verifica:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

donde A_1, A_2,....., A_n son números reales que hay que determinar

$$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = A_1\ln(x-x_1) + A_2(x-x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n(x-x_n) + \ln C =$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \ln C(x-x_1)^{A_1}....(x-x_2)^{A_n}$$

Ejemplo 8. Consideremos $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$

Igualando a cero el denominador:

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6)=0$$

Las raíces son **0** y $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+5}{2}=2 \\ \frac{-1-5}{2}=-3 \end{array}\right.$

Luego descomponiendo la fracción en fracciones simples, se tiene:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}$$

y se trata de calcular estas constantes.

Se tiene, efectuando la suma e igualando los numeradores,

$$x+1= A_1(x-2)(x+3)+A_2x\,(x+3)+ A_3x(x-2)$$

Teniendo en cuenta que los dos polinomios son iguales, tomarán los mismos valores en todos los puntos, en particular:

Para x=0 $\quad 0+1=A_1(-2)(3) \Rightarrow A_1=-1/6$

Para x=2 $\quad 2+1= A_2.2.5 \Rightarrow A_2 =3/10$

Para x=-3 $\quad -3+1=A_3(-3)(-5) \Rightarrow A_3=-2/15$

Luego $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = \frac{-1}{6}\ln x + \frac{3}{10}\ln(x-2) - \frac{2}{15}\ln(x+3) + \ln C$

Nota. Para el cálculo de las constantes hay otro método más general, el de los coeficientes indeterminados, pero en el caso de las raíces simples y distintas este es mejor.

Ejercicio. 6. Calcula: a) $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2-4}dx$; b) $\int \frac{2x+5}{x^2+2x-3}$

c) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+3)}dx$

EJERCICIOS

Calcula las siguientes integrales indefinidas (o comprobar las resueltas)

1. $\int \frac{x^3+5x^2+x-4}{x}dx =$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{8x}}dx =$

3. $\int \frac{x+1}{x-1}dx =$

4. $\int \frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx =$

5. $\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$

6. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6} =$

7. $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}dx =$

8. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$

9. $\int \frac{3}{x^2+5}dx =$

10. $\int x \operatorname{arctg} x dx =$

11. $\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx =$

12. $\int \operatorname{arcsen} x dx =$

13. $\int \sqrt{9-x^2}dx =$

14. $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{2}$ **+C**

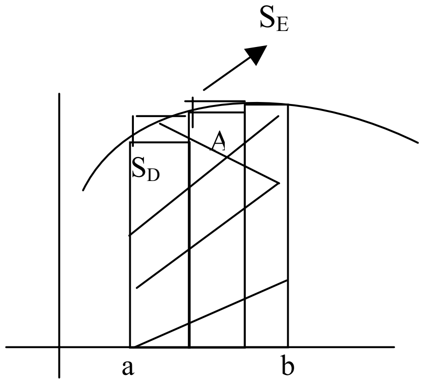
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$

16. $\int \cos(\log x)dx =$

Indicación $\cos(\log x) = \frac{\cos(\log x)}{x}x$

4. ***La integral definida. Significado geométrico***

INTRODUCCIÓN : *Problema del cálculo de un área*



Si A es el área buscada se tiene

$S_D < A < S_E$

Cuando el número de divisiones del intervalo [a, b] crezca indefinidamente las áreas por defecto y por exceso coincidirán y ese valor común será el área encerrada

Integral definida

Supongamos que f es una función continua y positiva en el intervalo [a, b].

Definición Se llama partición de [a, b] a todo conjunto ordenado de puntos de [a, b], donde el primero es a y el último b. Es decir

$P=\{p_0, p_1,......,p_n\}$ $\quad a= p_0<p_1<.....<p_n= b$

Llamaremos diámetro de una partición P a la mayor de las diferencias p_i-p_{i-1}, $i=1,2, ..,n$

Sean m_i = mín f(x)], M_i = máx f(x), $\quad x\in [p_{i-1}, p_i]$

Definición. Llamaremos suma inferior de f para la partición P de [a, b] y escribiremos s(f.P), a:

$$s(f,P)= \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}),$$

es decir a la suma de las áreas de los rectángulos que quedan por debajo de la gráfica de f, que es una aproximación del área que encierra f (área por defecto)[1]

Análogamente suma superior, S(f,P)

$$S(f, P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1})$$

que geométricamente representa la suma de las áreas de los rectángulos de base (p_i-p_{i-1}) y altura M_i (área por exceso)

Proposición. Para toda partición de [a, b] se verifica $\quad s(f,P)\leq S(f, P)$.

Demostración

Evidente ya que siempre se verifica $\mathbf{m_i \leq M_i}$

[1] Hacer dibujo

Definición. Una partición Q se dice que es más fina que otra P, $P \le Q$, si todo punto de P lo es de Q.

Proposición. Si P es más fina que Q $\Rightarrow$

$$s(f, P) \le s(f, Q) \le S(f, Q) \le S(f, P)$$

es decir, al aumentar el número de puntos de la partición el área por defecto aumenta y el área por defecto disminuye. (Trivial)

Definición de integral definida

Consideremos una sucesión de particiones $P_1 \le P_2 \le .... \le P_n$.......donde el diámetro (δ_n) de P_n tiende a cero. Por la proposición anterior se sigue:

$$s(f, P_1) \le s(f, P_2) \le ..... \le s(f, P_n) \le ,,,,, \le S(f, P_n) \le ..... \le S(f, P_1)$$

Estas dos sucesiones al ser monótonas y acotadas son convergentes y tienden a un mismo número real, al que llamamos la integral definida de f en [a, b], se denota:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n \to 0} S(f, P_n) = \lim_{\delta_n \to 0} s(f, P_n)}$$

Geométricamente la integral definida mide el área comprendida entre la curva y= f(x) el eje de las X y las rectas x= a y x= b.

Observación. Para las funciones de signo no constante se llegaría a la misma definición de integral definida, aunque en esos casos la integra no representa un área.

Por convenio se define $\int_b^a f = -\int_a^b f$, con lo cual tiene sentido la integral para b<a. Si a= b la integral es cero.

5. *Propiedades de la integral definida*

1) *Aditividad respecto del intervalo*

Si f es continua en [a, b]y c $\in$ (a, b) $\Rightarrow$ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

2) Si f es continua en [a, b] $\Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

3) *Linealidad de la integral definida*

Si f y g son continuas en [a, b] $\Rightarrow$

a) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

b) $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

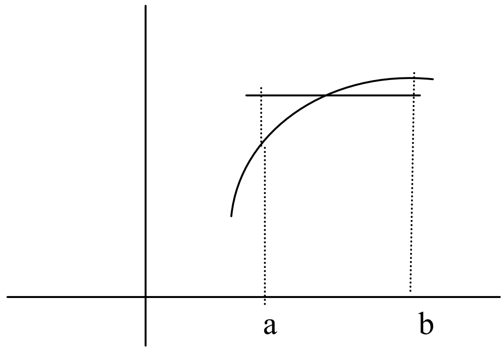
4) *Teorema del valor medio (para integrales)*

Si f es continua en [a, b] $\Rightarrow \exists \alpha \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a)$$

Interpretación geométrica:

Si f es positiva el área que encierra f es igual al del rectángulo de base b-a y de altura $f(\alpha)$



6. *Cálculo de la integral definida. Regla de Barrow*

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en [a, b] y definamos F(x)= $\int_a^b f(t)dt$. Entonces F es derivable y F'(c)= f(c) para todo c$\in$ [a, b]

Demostración

F'(c)=$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$; suponemos que h>0,para h<0 se procedería igual.

$$\left.\begin{array}{r} F(c+h) = \int_a^{c+h} f \\ F(c) = \int_a^c f \end{array}\right\} \Rightarrow \text{F(c +h)-F(c)= } \int_c^{c+h} f \text{ (por la aditividad)}$$

Aplicando el teorema del valor medio $\int_c^{c+h} f$ = f(α)h, $\alpha \in$(c, c +h)

$\Rightarrow \dfrac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(\alpha),$ y tomando límites cuando h tiendo a cero y que f es continua se llega a la tesis.

<u>Consecuencia.</u> Si f es continua en [a, b] F(a)= $\int_a^x f$ es una primitiva de f$\Rightarrow$

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

Observación. Para hallar el área de un trapecio curvilíneo basta con hallar una primitiva de la función que lo define. Para saber cuál es la primitiva que interesa se utiliza la regla de Barrow.

Regla de Barrow

Si f es continua en [a, b] y G es una primitiva de f $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Demostración

Consideremos F(x)= $\int_a^x f(t)dt$, que es primitiva de f. Como G también lo es $\Rightarrow$

F(x)= G(x) + C = $\int_a^x f(t)dt$

Para x= a, G(a)+C= 0 $\Rightarrow$ C= -G(a)

Como F(b)= $\int_a^b f$, se llega a $\boxed{\int_a^b f = \mathbf{G(b)-G(a)}= G(x)\Big|_a^b}$

Ejemplo 1. $\int_0^1 (x^2+7)dx = (\frac{x^3}{3}+7x)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+7=\frac{22}{3}$

7. *Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes de revolución*

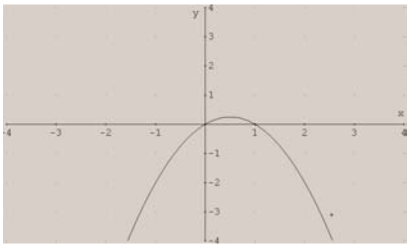
Áreas de recintos planos

Teniendo en cuenta los resultados anteriores el **área** que encierra una curva f con el eje de abscisas y las rectas x= a y x= b se puede calcular así: $\boxed{A=\int_a^b |f|}$

El área encerrada por dos curvas f y g entre a y b será $A=\int_a^b |f-g|$

Ejemplo 2. Calcula el área del recinto determinado por la parábola y=x-x^2 y el eje OX.

Solución



$\int_0^1 (x-x^2)dx = =(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 =$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Ejercicio 1. Hallar el área limitada por las gráficas de f(x)= x y g(x)= $\frac{x^3}{4}$

Ejercicio 2. Hallar el área limitada por las gráficas de las parábolas y=x^2 y x = y^2

Volúmenes de revolución

Si se conoce el área de la sección plana para todo x de [a, b], S(x) $\Rightarrow$

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

En particular para los volúmenes de revolución (Obtenidos al girar en torno al eje X):

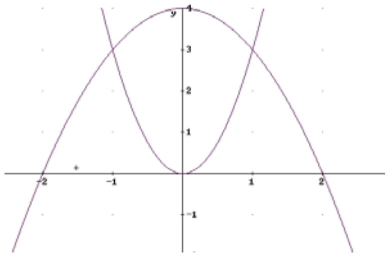
$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ejemplo 3. Hallar el volumen de la esfera de radio r.

f(x)= $\sqrt{r^2-x^2}$, luego V = $\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx = \pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$

EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

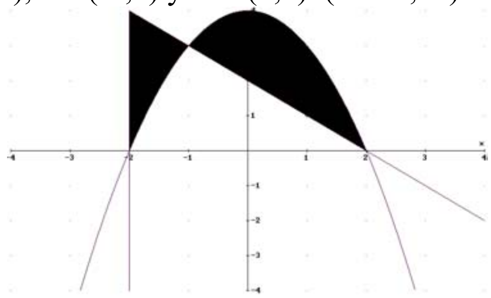
1. Halla el área de la región comprendida entre las curvas determinadas por $f(x)=4-x^2$ y $g(x)=3x^2$.



2. Calcula el área del recinto cerrado comprendido entre la curva $y=x^2+1$ y las rectas $y = x$, $x = -1$, $x = 2$.

3. Calcula el área del recinto del plano limitado por el eje X y por las gráficas de las funciones $y = x^2+4x+4$ e $y = 2x+3$. Realice un esbozo gráfico.

4. Hallar el área del recinto limitado por la curva $y=4-x^2$ y los segmentos AB y BC, siendo A = (-2,0), B =(-2,4) y C = (2,0). (Sol. 6,33)



4. Dada la función f(x) $=\begin{cases} x^2-2x & si \quad o \le x \le 2 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$ ¿puede ser función de densidad para alguna variable aleatoria continua? Justifíquese la respuesta. (Sol. No)

Nota. Si f(x) es una función de densidad $\int_0^2 f(x)dx = 1$

4. Dada la función $f(x)=x^3-3kx^2+9x+5$:

a) Calcular el valor de k para que la función tenga un punto de inflexión en x =2

b) Calcular el área que deja la derivada de la función debajo del eje X.

5. Durante un cierto periodo de tiempo, las hojas de una especie vegetal transpiran a razón de 2mg de agua por cm^2. Los bordes de una de dichas hojas coinciden con los del recinto acotado del plano limitado por las curvas de ecuaciones $y=(5x)^{1/2}$ e $y=(1/5)x^2$, donde x e y están expresados en cm. Calcular la cantidad de agua transpirada por dicha hoja en el periodo de tiempo citado. (Sol. 16,66 mg)

EJEMPLOS DE CUESTIONES Y PROBLEMAS[2]

1. Dadas las parábolas $y = x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ e $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

a) Hallar el área encerrada por ambas

b) La distancia entre sus vértices.

2. Integrar las funciones

a) $y = \dfrac{x}{1 + \frac{2}{3}x^2}$; b) $y = \dfrac{1}{1 + \frac{2}{3}x^2}$; c) $y = x^2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x^3)$;

d) $y = (x^2 + x)\ln x$; f) $y = xe^{-3x}$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 2 & 2 \le x \le a \end{cases}$ ¿Qué valor debe tener a para que el área encerrada por la curva y= f(x), y= 2 y el eje vertical sea igual al área encerrada por la curva y= f(x), x= a y el eje horizontal.

4. Las rectas y= x+1, y= -2x+10 e y= -x-1 determinan un triángulo del que queremos conocer su área.

5. a)¿Qué valor debe tener **a** para que la recta y= -x+6 y la curva y= -ax^2+5x-1 sean paralelas en x= 1

b) ¿Cuál es el máximo valor posible de **a** para que el recinto encerrado por ambas curvas no sea vacío?.

6. La curva y= x^3-a y la recta y= bx+1 se cortan en los puntos de abscisa x= -1 y x= 2.

a) Hallar los parámetros a y b.

b) Hallar el área encerrada por ambas.

7. a) Hallar a>0 para que $\int_0^a (x-1)dx = 4$

b) Representar las rectas y= x-1, x= a, para el valor d a obtenido en el apartado anterior. Al observar el gráfico resultante, ¿podemos decir que el área entre las rectas y= x-1, x= a, x=0 y el eje horizontal es 4?

8. Hallar el área encerrada por la curva $y = \begin{cases} (x-2)^2 \; si & x \ge 0 \\ 2x + 4\, si & x \le 0 \end{cases}$ y el eje de abscisas.

[2] Mandados por el coordinador de las PAU