P R O B A B I L I D A D

INTRODUCCIÓN: El nacimiento del cálculo de probabilidades estuvo ligado a los juegos de azar. Cardano (que tenía una afición desordenada por el ajedrez y los dados, según reconoce en su autobiografía) escribió *"Libro sobre los juegos de azar*", publicado póstumamente en **1663**, y que fue considerado el primer tratado serio sobre las probabilidades matemáticas. La correspondencia que Pascal y Fermat intercambiaron (a mediados del siglo XVII) sobre la *geometría del azar* marca el nacimiento de la nueva ciencia. En la actualidad el **Cálculo de Probabilidades** ha llegado a ser la rama de las matemáticas de mayor penetración en todos los campos, directamente o a través de la Estadística.

1. *Experimento aleatorio. Espacio muestral.*

Definición 1. Se llama *experimento* o fenómeno *aleatorio* a aquél que es susceptible de dar varios resultados, no pudiéndose predecir de antemano cuál de ellos va a producirse en una experiencia concreta.

Cada ejecución del experimento se llama una prueba del mismo.

Ejemplo 1: Lanzar un dado o una moneda al aire son experimentos aleatorios.

Se llama experimento determinista al que realizado en la mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado (de éstos se ocupa la Física).

Definición 2. Llamaremos **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio.

Ejemplo 2: En el experimento "lanzar un dado" los sucesos elementales son 6. S_1 = "sacar un 1",.........., S_6 = "sacar un 6".

Definición 3. Se llama espacio probabilístico o **espacio muestral**, ***E***, al conjunto de todos sus sucesos elementales.

Ejemplo 3: En el experimento lanzar una moneda el espacio muestral tiene dos elementos, :$E = \{C, F\}$.
Ejercicio 1. Encuentra el espacio muestral del experimento lanzar dos monedas.

Definición 4. Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Diremos que un suceso, A, <u>ocurre</u> (o se verifica) en una prueba si el resultado de la misma es uno de los sucesos elementales que pertenecen a A.

Ejemplo 4: El suceso A = sacar par al lanzar un dado ($A=\{S_2, S_4, S_6\}$) se verifica si sale un dos, un cuatro o un seis.

Ejemplo 5. Si tiramos dos monedas al aire sea A = "al menos una sea cara". El suceso A consta de tres sucesos elementales a saber CC, CF y FC.

En todo espacio muestral podemos distinguir los siguientes sucesos:

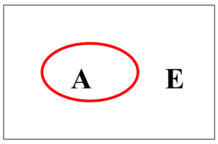
♣ Sucesos *elementales*, los subconjuntos con un solo elemento.

♣ Suceso **seguro,** E, el propio espacio muestral.

♣ Suceso **imposible,** ϕ, que no posee ningún suceso elemental (no puede verificarse).

Teniendo en cuenta que los sucesos son subconjuntos se suelen usar los **diagramas de Venn** para representarlos.

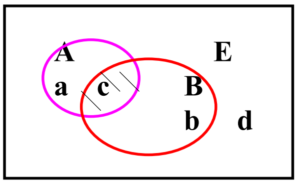
Figura 1



Si A y B son dos sucesos del espacio muestral E, éste queda dividido en cuatro partes:

Los que están en A y no en B, los que están en B y no en A, los que están en ambos y los que no están ni en a ni en B.

Figura 2



En el dibujo se ha indicado el número de sucesos elementales que les corresponden.

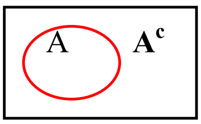
Llamaremos *𝒫(ℰ)* al conjunto de todos los sucesos, es decir a partes de E.

♠ Diremos que el suceso <u>*A implica el B*</u>, sí siempre que se verifica A se verifica B. Se indica **A ⊂ B**, pues todos los sucesos de A pertenecen a B.

Ejemplo 6. A = "sacar un dos" ; B = "sacar par"

♠ Dos sucesos son iguales cuando contienen los mismos sucesos elementales; se puede expresar esto diciendo que se implican mutuamente, **A ⊂ B y B⊂ A.**

Definición 5. Se llama **suceso contrario** (o complementario) de A, y se representa por A' ó A^c, al formado por los sucesos elementales de E que no están en A.



Es decir se verifica A^c cuando no se verifica A.

Ejemplo 7. Si consideramos el suceso A = sacar dos cruces, al lanzar dos monedas, A^c es el suceso sacar al menos una cara.

Ejemplo 8. En la figura 1 el contrario de B está formado por a+d elementos.

2. Operaciones con sucesos

Teniendo en cuenta que los sucesos son subconjuntose se definen la:

⬘ **Unión de sucesos.**

Se llamará **unión de dos sucesos** A y B al que se verifica cuando en una prueba el resultado es un elemento de A o de B (o de ambos). Se representa $A \cup B$ (corresponde a la unión conjuntista).

Ejemplo 9. En la figura 2 el suceso $A \cup B$ tiene **a + c + b** elementos.

Intersección de sucesos.

Llamaremos **suceso intersección** de A y B al que ocurre cuando el resultado de una prueba es un elemento de ambos. Se representa $A \cap B$ (corresponde a la intersección conjuntista).

Ejemplo 10. En la figura 2 el suceso intersección tiene **c** elementos.

Diferencia de sucesos.

Si A y B son dos sucesos se define su diferencia como: $\mathbf{A - B = A \cap B^c}$.

Se verifica pues: $\mathbf{A^c = E - A}$.

Ejemplo 11. En la figura 2., A - B tiene **a** elementos.

Propiedades de la unión e intersección.

a) Idempotente:
$A \cup A = A$; $A \cap A = A$

b) Asociativa:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) Conmutativa:
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

d) Neutro:
$A \cup \phi = A$ $A \cap E = A$

e) Absorbente:
$A \cup E = E$; $A \cap \phi = \phi$

f) Distributiva:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) Leyes de Morgan:
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

h) Complementarios:
$(A^c)^c = A$; $A \cup A^c = E$; $A \cap A^c = \phi$; $\phi^c = E$

Estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ es un retículo complementario, es decir un ***Álgebra de Boole.***

Definición 6. Dos sucesos A y B se dice que son **incompatibles** si tienen intersección vacía. En otro caso se dirán compatibles.

Ejemplo 12. Cualquier suceso A y su contrario son incompatibles.
Ejemplo 13. Si extraemos dos cartas de una baraja española (40 cartas) los sucesos:
A = " las dos sean copas" y B = " una sea copas y la otra rey" son compatibles.

Problema 1. En una determinada población el 50% ha estado casado alguna vez, el 50% tiene menos de 70 años y el 80% no padece ninguna enfermedad contagiosa. De estos últimos el 60% tiene menos de 70 años y el 40% ha estado casado alguna vez. De los que han estado casados alguna vez, sólo el 20% tiene menos de 70 años. El 10% de la población reúne las tres condiciones. Representar la información anterior en un diagrama de Venn.

Solución

(Por comodidad en la representación consideramos que la población tiene 100 personas)

Sea C el conjunto de los que han estado casados alguna vez.

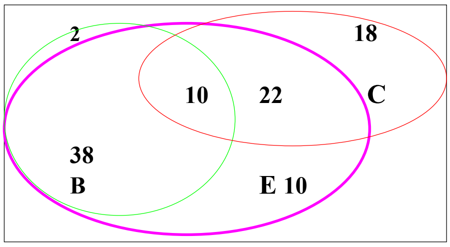
" B " tienen menos de 70 años.

" E " no padecen enfermedad contagiosa.

card (C) = 50% de la población; card (E) = 80%; card (B) =50%:

card (E ∩ B) = 48%; card (E ∩ C) = 32%; card (C ∩ B) = 10%;

card (C ∩ E ∩ B) = 10%



Ejercicio 1. Calcula el porcentaje de individuos que no habiendo estado casados nunca, tengan menos de 70 años y no padecen enfermedad contagiosa.

Indicación : es el cardinal de $C^c \cap B \cap E$ (Sol. 38%)

3. Espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio.

Idea intuitiva de probabilidad

♦ Al realizar N pruebas de un experimento aleatorio se llama frecuencia **absoluta** del suceso A, n(A), al nº de veces que se ha verificado A.

La frecuencia relativa de un suceso A se define como el cociente entre su frecuencia absoluta y el nº total de pruebas, es decir:

$$\boxed{f(A) = \frac{n(A)}{N}}$$

Ejercicio 2. Lanzar un dado 30 veces y calcula las frecuencia relativa del suceso obtener un 6.

Propiedades:

1) La frecuencia relativa de cualquier suceso, A, es un nº racional del intervalo [0,1], es decir $0 \leq f(A) \leq 1$

2) f(E) = 1, la frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

3) Si $A \cap B = \phi \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, es decir si dos sucesos son incompatibles la frecuencia relativa de su unión es la suma de sus frecuencias relativas.

La comprobación es inmediata.

♣ Cuando se realiza un nº muy grande de pruebas puede comprobarse que la frecuencia relativa de uno cualquiera de los sucesos tiende a **estabilizarse**. Esto quiere decir que la frecuencia relativa toma valores próximos a un nº fijo, y que según aumenta el nº de pruebas más se acerca a ese valor. A dicho valor es al que llamaremos la **probabilidad**[1] de A, p(A)

$$p(A) = \boxed{\lim_{N\to\infty} \frac{n(A)}{N}}$$ **(probabilidad a posteriori)**.

Esta forma de asignar probabilidades tiene el inconveniente de puede variar de unas series a otras, a pesar de la estabilidad de las frecuencias.

[1] Ley de los grandes números.

♣ Otra forma consiste en asignar una probabilidad **a priori** cuando se cumpla *el postulado de indiferencia* o ley de la ignorancia[2].

Ejemplo 14. Si el experimento es lanzar un dado, que no esté trucado, se cumple dicho postulado, a cada resultado se le asigna como probabilidad **a priori** el valor 1/6.

Probabilidad de Laplace

Cuando se pueda asegurar que se cumple el *postulado de indiferencia*, es decir que todos los sucesos elementales sean igualmente posibles, se define:

$$\mathbf{p(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a A}}{\text{Número de caso posibles}}}$$

Se conoce como la **Regla de Laplace**, el nº obtenido es la probabilidad a priori o de Laplace**.**

Ejemplo 15. Consideremos el experimento lanzar dos monedas al aire. Vamos a calcular la probabilidad del suceso, A, sacar una cara y una cruz.

El espacio muestral consta de cuatro sucesos elementales igualmente "probables":

CC, CF, FC y FF, luego p(A) =2/4 =1/2.

Ejercicio 3. Calcula la probabilidad de obtener dos 6 al lanzar dos dados.

Definición axiomática de probabilidad

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole asociada a un experimento del espacio muestral E, teniendo en cuenta las propiedades de la frecuencia relativa se define:

Definición 7. Se llama **probabilidad** a una aplicación **p:** $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \to [0,1]$

A → p(A)

que cumple las siguientes condiciones, llamadas *axiomas de probabilidad:*

I. p (E) = 1.

II. Si A y B son incompatibles ⇒ p(A ∪ B) = p(A) + p(B)

A la terna (E, $\mathcal{A}$, **p**) se le llama espacio probabilístico asociado al experimento en cuestión.

Ejercicio 4. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados la suma de puntos obtenidos sea ≥10?.

Consecuencias de los axiomas de probabilidad

1) $p(A^c) = 1 - p(A)$

Demostración

Por definición de contrario: $E = A \cup A^c$,

Como son incompatibles por el axioma II, $p(E) = p(A) + p(A^c) = 1$, de donde se deduce el resultado buscado.

Ejemplo 16. De una baraja de 40 cartas extraemos dos cartas a la vez., ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea copas?.

Solución . Sea A el suceso " al extraer dos cartas al menos una es copas"

Pasamos al contrario, A^c , es decir calculamos la probabilidad de que ninguna sea copas.

Sucesos posibles: $\binom{40}{2}$, que son todos los grupos de 2 cartas que se pueden sacar.

[2] El espacio muestral, E, se puede descomponer en k sucesos elementales con igual probabilidad, con lo que 1/k sería su probabilidad.

Sucesos favorables: $\binom{30}{2}$ pues hay 30 cartas que no son copas.

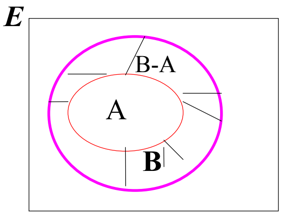
Por la regla de Laplace tenemos: $p(A^c) = \dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{30}{40}\dfrac{29}{39} = \dfrac{29}{52} = 0{,}56 \Rightarrow p(A) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$

2) p(ϕ) = 0 . Demostración: trivial ya que es el contrario de E.

3) **Si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.**

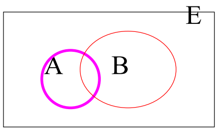
Demostración.

Se verifica que: $B = A \cup (B - A)$, de donde $p(B) = p(A) + p(B-A)$[3] $\geq p(A)$



4) **Si A y B son sucesos compatibles: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$**

Demostración: Se tiene que $A \cup B = A \cup (B - A)$, luego



$p(A \cup B) = p(A) + p(B-A)$ (*)

Además $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, sucesos incompatibles $\Rightarrow$

$p(B) = p(B - A) + p(A \cap B) \Rightarrow p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$

Sustituyendo en (*) se obtiene el resultado.

Ejemplo 17. Calcular la probabilidad de obtener un as ó una copa al extraer una carta de una baraja española.

Solución : p(as ó copas) = 1/10 + 1/4 - 1/40 = 13/40.

Ejercicio 5. En una baraja hemos suprimido varias cartas. Entre las cartas que nos quedan se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas: p(R) = 0,15, p(B) = 0,3, p(carta que no sea ni rey ni basto) = 0,6. ¿Está entre ellas el rey de bastos?. En caso afirmativo calcula su probabilidad.

Nota. El resultado puede generalizarse a 3 o más sucesos.

En particular si A, B y C son tres sucesos compatibles se verifica:

$$\boxed{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A\cap B) - p(A\cap C) - p(B\cap C) - p(A\cap B\cap C)} \quad \textbf{(1)}$$

Problema 2. En una determinada población, el 70% son aficionados al fútbol, el 60% al tenis y el 65% al baloncesto. El 45% lo son al fútbol y al tenis, el 40% al tenis y al baloncesto y el 50% al futbol y al baloncesto, mientras que el 30% lo son a los tres deportes. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo escogido al azar no sea aficionado a ninguno de los tres deportes?

Solución

Pasamos al contrario, es decir calculamos en primer lugar la probabilidad de que sea aficionado al menos a uno de los tres.

$p(F \cup T \cup B)$ [4] = 0,70 + 0,60 + 0,65 - 0,45 - 0,40 - 0,50 + 0,30 = 0,90

Por lo tanto p("no sea aficionado a ningún deporte de los tres") = 1 - 0,90 = 0,10.

[3] Por ser disjuntos.

[4] Aplicando (1)

Ejercicio 6. Resolver el problema 2 usando diagramas de Venn.

3. *Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.*

Muchas veces la probabilidad de que ocurra un suceso viene influida por el hecho de que ocurra o no otro suceso, o por una información adicional.

Ejemplo 18.
Supongamos un dado cuyas caras pares son de color negro y las impares de color rojo.
La probabilidad de los sucesos elementales, en principio, es 1/6; pero si en el lanzamiento se nos informa que la cara obtenida es de color negro, sin decirnos el resultado, entonces la probabilidad cambia: la de los impares sería cero y la de los pares 1/3.
Esto nos dice que hemos pasado a *otro espacio probabilístico* donde no se cumple el postulado de indiferencia.

En general, si A y B son dos sucesos del álgebra de sucesos, se define la probabilidad **condicionada** del suceso A sobre el B como la *probabilidad de que ocurra A habiendo sucedido antes B:*

Definición 8. Sea B un suceso tal que p(B) ≠ 0; para cualquier suceso A llamaremos probabilidad de A condicionada a B:

$$\mathbf{p(A/B)} = \boxed{\frac{p(A\cap B)}{p(B)}}$$

Si consideramos la aplicación: p_B: $\mathcal{P}(E) \rightarrow [0,1]$

$A \rightarrow p(A/B)$

se puede comprobar que es una probabilidad.

Observación 1

La aplicación p_B así definida es una probabilidad en la que el espacio **muestral E** se puede considerar reducido al **suceso B** como consecuencia de la información sobre el experimento aleatorio.

En efecto:

$$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\dfrac{card(A\cap B)}{card(E)}}{\dfrac{card(B)}{card(E)}} = \frac{card(A\cap B)}{card(B)}$$

Ejemplo 19. En una determinada localidad hay tres partidos políticos: PP, PSOE e IU. Se efectúa un referéndum para decidir si un cierto día se declara fiesta local. La siguiente tabla nos da los resultados en % en función del partido al que votó cada ciudadano en las últimas elecciones:

	PP	**PSOE**	**IU**	**Abs**
Sí	25	20	8	12
No	15	10	2	8

a) ¿Qué probabilidad hay de que una persona tomada al azar haya votado Sí en el referéndum?
b) Calcular la probabilidad de que un individuo sea del PP sabiendo que ha votado sí.
Solución:
En primer lugar completamos la tabla con las sumas parciales:

	PP	**PSOE**	**IU**	**Abs**	
Sí	25	20	8	12	65
No	15	10	2	8	35

40 30 10 20 100

a) p(**Sí**) = 0,65; b) p(**PP/Sí**) = 25/65 = 0,38.

Ejemplo 20. En una clase de COU el 45% de los estudiantes suspende Matemáticas, el 60% suspende física y el 30% suspende ambas. Se selecciona al azar un alumno:

a) Si suspendió Física ¿Cuál es la probabilidad de que suspendiera Matemáticas?
b) Si suspendió Matemáticas " " Física?
Solución
Sea A = "suspende Matemáticas" y B = " suspende Física"
$p(A) = 0{,}45$; $p(B) = 0{,}60$; $p(A \cap B) = 0{,}30$
a) $p(A/B) = 0{,}30/0{,}60 = 1/2$; $p(B/A) = 0{,}30/0{,}45 = 2/3$

Consecuencia: De la definición de probabilidad condicionada se deduce:

$$\mathbf{p(A \cap B) = p(B).p(A/B)} \qquad \textbf{[2]}$$

Esta expresión se conoce como la fórmula de la *probabilidad compuesta*.

Ejemplo 21. Calcular la probabilidad de que al extrer dos cartas de una baraja la 1ª sea copas y la 2ª bastos.

Solución $p(1^aC, 2^aB) = p(1^aC).\ p(2^aB/1^aC) = \frac{10}{40}\frac{10}{39} = \frac{5}{78}$

Nota: La fórmula **[2]** puede generalizarse a tres o más sucesos. En el caso de tres se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{p(A \cap B \cap C) = p(A).\ p(B/A).\ p(C/\ A \cap B)}}$$

Ejemplo 22. En una urna hay 3 bolas blancas , 5 rojas y 4 negras. Se extraen tres bolas consecutivamente, sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que las tres sean rojas
Solución

$$p(1^aR, 2^aR, 3^aR) = \frac{5}{12}\frac{4}{11}\frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Observación 2.

Hay ocasiones en que las pruebas no son sucesivas sino simultáneas, lanzar dos dados, extraer tres cartas de una baraja etc.**...** Se pueden encontrar muchos casos en que se pueden considerar como si se sucedieran en el tiempo, lo que facilita el cálculo de sus probabilidades.

Ejemplo 23. Supongamos que tenemos una urna con 5 bolas rojas y 4 bolas negras y que extraemos dos bolas, esto lo podemos hacer de **tres** formas:

1º) *con reemplazamiento*. La primera que se extrae se devuelve a la urna.
2º) **sin reemplazamiento**. " " **no** se devuelve "
3º) **simultáneamente**. Las dos a la vez.

5 **R**
4 **N**

Vamos a calcular la probabilidad de que las dos sean rojas.

1º) $p(1^aR, 2^aR) = \frac{5}{9}\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$ con reemplamiento; 2º) $p(1^aR, 2^aR) = \frac{5}{9}\frac{4}{8} = \frac{5}{18}$ sin reemplazamiento;

3º) $p(\text{las dos rojas}) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{\frac{5.4}{2}}{\frac{9.8}{2}} = \dfrac{5}{18}$ a la vez.

Observamos que en los caso **2º y 3º** la <u>probabilidad es la misma</u> y su cálculo más sencillo considerando extracciones sucesivas.

Veamos para otro suceso.

Si queremos calcular la probabilidad de que al extraer dos bolas una sea roja y la otra negra:

<u>A la vez</u>.

p(una roja y otra negra) = $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = 2.\dfrac{5.4}{9.8} = \dfrac{5}{9}$

Sin reemplazamiento.

Est suceso es la unión de RN y NR, ya el orden no importa. Son incompatibles:

p (una roja y otra negra) = p(RN) + p(NR) = $\frac{5}{9}\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\frac{5}{8} = 2\frac{5.4}{9.8} = \frac{5}{9}$, luego coinciden de nuevo.

Podemos concluir que en determinados casos simultáneamente "equivale " a extracciones sucesivas sin reemplazamiento.

Ejercicio 7. Resolver el ejemplo 16 utilizando la conclusión anterior.

Problema 3. Una urna contiene 8 blancas y 7 negras, hacemos una extracción de 2 bolas, en el supuesto de que hemos visto que una de estas bolas es negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también lo sea?

Solución

Sea el suceso A = "al extraer dos bolas, al menos una sea negra"

" B = "al extraer dos bolas, las dos sean negras"

Se verifica $B \subset A$, luego $A \cap B = B$ y p (B) = $\frac{7}{15}\frac{6}{14} = \frac{1}{5}$;

p(A) = 1- p(A^c) = 1 - $\frac{8}{15}\frac{7}{14} = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$;

La probabilidad pedida es: p(B/A)= $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{15}} = \dfrac{3}{11}$

Independencia de sucesos

Definición 9. Se dice que un suceso A es **independiente** de otro B cuando:

$$\mathbf{p(A/B) = P(A)}$$

En otro caso se dirá que son *dependientes.*

Consecuencias: Si A es independiente de B $\Rightarrow$

- **p(A ∩ B) = p(A).p(B)** . Por **[2]**
- *B es independiente de A*. Teniendo en cuenta lo anterior es trivial.
- A^c es independiente de B. (comprobarlo)
- E y ϕ son independientes de cualquier suceso.

Observaciones:

1) Si los sucesos son incompatibles no pueden ser independientes, pues $p(A \cap B)=0$.

2) Para hablar de independencia de dos sucesos A y B ha de tenerse que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$ (a excepción de E y ϕ)

En efecto si, por ejemplo, B contenido en A $\Rightarrow$ p(A/B) =1, y $p(A \cap B) = p(B) \neq p(A).p(B)$.

Ejemplo 24. Hallar la probabilidad de que al tirar dos veces una moneda las dos veces salga cara
Solución
Son sucesos independientes ⇒ p(dos caras) = (1/2).(1/2) = 1/4

Ejemplo 25. De una baraja de 40 cartas hacemos dos extracciones sucesivas, sin devolución . Calcula la probabilidad de que las dos sean reyes.
Solución
Son sucesos dependientes[5], pues al sacar una carta se modifica la composición de la baraja.
p(2 reyes) = p(rey la 1ª). p(rey la 2ª/ ha sido rey la 1ª) = $\frac{4}{40}\frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

Nota: Se puede generalizar a tres o más sucesos.

Definición 10. Se dice que los sucesos A, B y C son *independientes dos a dos* si:

$p(A \cap B) = p(A).\ p(B)$, $p(B \cap C) = p(B).p(C)$, $p(A \cap C) = p(A).p(C)$,

Si además **$p(A \cap B \cap C) = p(A).\ p(B).\ p(C)$,** se dirán mutuamente independientes.

Ejemplo 26. Un avión con tres bombas trata de destruir una línea férrea; la probabilidad de destruir la línea con cualquiera de las bombas es 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de que la línea quede destruida si el avión emplea las tres bombas?
Solución
La probabilidad de que una *determinada* bomba no haga blanco es : $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

La probabilidad de que **ninguna haga blanco**, es $\left(\frac{2}{3}\right)^3$,(es decir no acierte ni 1ª, ni 2ª ni, 3ª), pues son sucesos *independientes.*

La probabilidad de que **al menos una haga blanco** es $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$, ya que son contrarios.

4. Experimentos compuestos. Teorema de Bayes

En un experimento aleatorio hay que considerar las condiciones en que se hace el experimento y los resultados posibles del mismo. A veces se consideran varios experimentos sucesivos y las condiciones de cada uno pueden ser o no influidas por los resultados del precedente. Tenemos así una primera idea intuitiva de dependencia e independencia de experimentos aleatorios.

Hasta aquí nos habíamos referido a la dependencia e independencia de sucesos relativos a un mismo espacio probabilístico (E_1, $\mathcal{A}_1$, p_1). Supongamos ahora definido un segundo experimento que da origen al espacio (E_2, $\mathcal{A}_2$, p_2), llamaremos espacio producto cartesiano $E_1 x\ E_2$ al formado a partir de los m.n sucesos elementales:

$$(A_i, B_j) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n\ ;\ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m)$$

Podremos definir una probabilidad para $E_1 x\ E_2$ de la forma siguiente:

Si no se pueden considerar los experimentos como físicamente independientes, se calcularán las probabilidades de los sucesos del producto cartesiano por la relación:

$$\mathbf{p(A_i, B_j) = p_1(A_i)p_2(B_j/A_i)}$$

Si se pueden considerar independientes se tendrá:

$$\mathbf{p(A_i, B_j) = p_1(A_i)p_2(B_j)}$$

Tendremos, pues, el espacio probabilístico ($E_1 x\ E_2$, $\mathcal{A}$, p)

Nota. En la práctica se identifica el suceso (A, B) con el suceso ocurrir A y B ($A \cap B$).

Ejemplo 27. Se lanza un dado, si el número obtenido es < 3 se extrae una bola de una urna U_1 que contiene 4 bolas blancas y 3 rojas; si el número es ≥ 3 se extrae una bola de una urna U_2 que contiene 2 bolas blancas y 6 rojas. Calcular la probabilidad de que salga un 5 y que la bola sea roja.

---

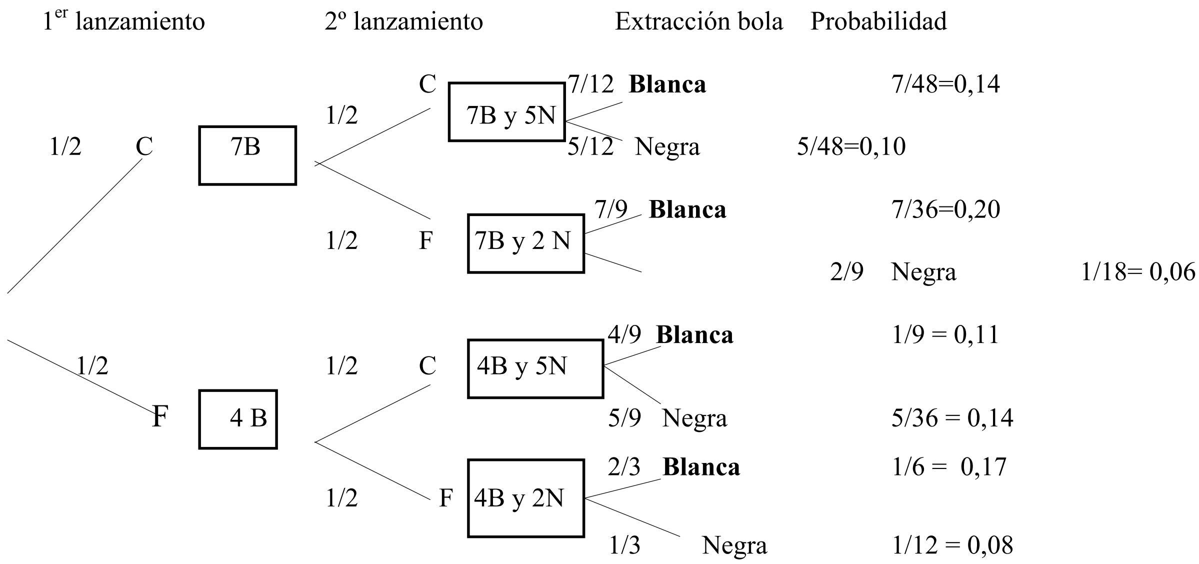
[5] Si devolviéramos la 1ª carta los sucesos serían independientes.

Solución
p(5, R) = p (5). p(R/5) , ya que son dependientes.
p(5) = 1/6 y como 5> 3, p(R/5) = 6/8 = 3/4. Por lo tanto p(5, R) = 1/8.

Diagramas de árbol

Cuando se quiere calcular la probababilidad de sucesos de experimentos compuestos son muy útiles los diagramas de árbol cuyas ramas nos indican las distintas posibilidades.

Ejemplo 28. Se lanza una moneda y si sale cara se ponen 7 bolas blancas en una urna y si sale cruz se ponen 4 blancas. Se vuelve a lanzar la moneda y se ponen 5 o 2 bolas negras, según se saque cara o cruz. Despues se saca una bola de urna así compuesta. Veamos las distintas posibilidades:



Si queremos la probabilidad de que sea blanca, se tendrá: p(B) =7/48 + 7/36 + 1/9 +1/6= 89/144 = 0,62
El *teorema de la probabilidad total* formaliza este resultado.
Si sabemos que la bola que ha salido es blanca ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?
Teníamos los siguientes resultados :

Se extrae	blanca cuando CC: 0,14		
"	blanca cuando CF: 0,20		
"	blanca cuando FC: 0,11	$\rangle$	blanca : 0,62
"	blanca cuando FF: 0,17		

Esto puede interpretarse así: de cada 62 veces que extraemos blanca, 14 veces ocurre cuando sale CC, luego la proporción es 0,14/0,62 = 0,225%
Podemos afirmar pues que p(CC/B) = 0,225.
La *fórmula de Bayes* nos justifica este resultado.

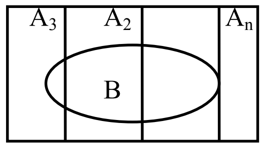
Definición 11. Si A_1, A_2, ..., A_n verifican que su *unión* es el espacio muestral, E, y son *disjuntos dos a dos* se dirá que forman un **sistema exhaustivo**.

Teorema 1. Sea A_1, A_2, ..., A_n un sistema exhaustivo del que se conocen sus probabilidades a priori, $p(A_i)$. Sea B otro suceso para el cual se conocen las probabilidades condicionadas, $p(B/A_i)$. Entonces:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).p(B/A_i)$$

Resultado que se conoce con el nombre de *Teorema de la probabilidad total*

Demostración



Por ser un sistema exhaustivo, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$, entonces:

p (B) = p(B ∩ E) = p($(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = p(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i)$ *= $\sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B / A_i)$

*ya que todos son incompatibles.

A p(B) se le llama la ***probabilidad total*** *de B.*

Ejemplo 29. Vamos a ver la razón de que se le de este nombre.
Supongamos que B es el suceso que al extraer una bola de entre dos urnas ésta sea blanca.

El de que urna hay que elegir viene dado por el lanzamiento de una moneda.
Sea: A_1 el suceso elegir la 1ª urna y A_2 el suceso elegir la 2ª urna. Forman un sistema exhaustivo.
La probabilidad de ambos es 1/2.
$p(B/A_1) = 2/5$ y $p(B/A_2) = 3/7$, a estas probabilidades se les llama parciales y a:

$$p(B) = \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{7} = \frac{29}{70}$$ probabilidad total.

Ejercicio 12. Resolver el ejemplo 28 utilizando el teorema de la probabilidad total.

Ejemplo 30. Un libro tiene 3 capítulos. El 85% de las páginas del 1er capítulo no tiene ningún error. El 90% del segundo y el 95% del tercero tampoco tienen ningún error.
El primer capítulo tiene 125 páginas, el 2º 150 y el 3º 175.
¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una página al azar no tenga ningún error?
Solución
Llamamos: A_1 = "ser página del primer capítulo", $p(A_1) = 125/450 = 5/18$
A_2 = "ser página del segundo capítulo", $p(A_2) = 150/450 = 1/3$
A_3 = "ser página del tercer capítulo" , $p(A_3) = 175/450 = 7/18$

A_1 , A_2 y A_3 forman un sistema exhaustivo.

Sea B = "ser página que no tenga errores"

$p(B/A_1) = 0{,}85$, $p(B/A_2) = 0{,}90$, $p(B/A_2) = 0{,}95$ y por lo tanto:

$$p(B) = \frac{5}{18}\frac{85}{100} + \frac{1}{3}\frac{9}{10} + \frac{7}{18}\frac{95}{100} = 0{,}905$$

Teorema de Bayes

Supongamos que en las circunstancias del ejemplo 29 nos planteamos ahora lo siguiente: Sabiendo que ha salido bola blanca ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido cara? Es decir queremos calcular $p(A_1/B)$.

Se tiene $p(A_1 \cap B) = p(A_1).p(B/ A_1)$, pero también $p(A_1 \cap B) = p(B).p(A_1/B)$, luego

$p(A_1).p(B/ A_1) = p(B).p(A_1/B)$ de donde:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1)p(B/A_1)}{p(B)}$$

En nuestro caso: $p(A_1/B) = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{2}{5}}{\frac{29}{70}} = \dfrac{14}{29}$

Teorema 2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema exhaustivo y B es un suceso se verifica:

$$\boxed{p(A_i / B) = \frac{p(A_i)p(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j)p(B/A_j)}}$$

resultado que se conoce con el nombre de **fórmula de Bayes.**

Demostración

Teniendo en cuenta que:

$$p(A_i \cap B) = p(A_i).p(B/A_i) \text{ y } p(A_i \cap B) = p(B).p(A_i/B)$$

Se deduce $p(A_i).p(B/A_i) = p(B).p(A_i/B)$, de donde despejando $p(A_i/B)$ se llega al resultado.

Es corriente llamar a las probabilidades $p(A_i)$ probabilidades a priori, a las de $p(A_i/B)$ probabilidades a posteriori y a las $p(B/A_i)$ verosimilitudes.

Ejemplo 31. Con los datos del ejemplo 28, suponemos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error ¿cuál es la probabilidad de que sea del capítulo 2º.

Solución

Aplicando la fórmula de Bayes

$$p(A_2 / B) = \frac{p(A_2)p(B/A_2)}{p(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}236 + 0{,}3 + 0{,}369} = 0{,}3331$$

Problema 4. Se tiene 3 urnas con las siguientes composiciones:

A_1	1 b	2 n	3 r
A_2	2 b	1 n	1 r
A_3	4 b	5 n	3 r

Se elige una urna al azar y se extraen simultáneamente dos bolas resultando ser una blanca y la otra roja. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido A_2 ó A_3.

Solución

Se tiene $p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = 1/3$

Sea B = suceso sacar 1 b y 1 r.

$$p(B/A_1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}\text{ ; } p(B/A_2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{3}\text{ ; } p(B/A_3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{12}{6.11} = \frac{2}{11}\text{ ;}$$

Luego $p(B) = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{11}) = \dfrac{1}{3}(\dfrac{33+55+30}{165}) = \dfrac{118}{495}$

Como $p(A_2 \cup A_3 /B) = 1 - p(A_1 /B) = 1 - \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{118}{495}} = 1 - \dfrac{33}{118} = \dfrac{85}{118}$

Ejercicio 13. Hay una epidemia de cólera (C). Consideramos como uno de los síntomas la diarrea (D), pero este síntoma se presenta también en personas con intoxicación (I), e incluso en algunas que no tengan nada serio (N). Las probabilidades son:

p(D/C) = 0,99; p(D/I) =0,5; p(D/N) = 0,004

Se dan los siguientes porcentajes: el 2% de la población tiene cólera y el 0,5 % intoxicación.

Si una persona tiene diarrea calcula la probabilidad de que tenga cólera.

Problemas finales(resueltos)

1.. Cada pregunta de un examen tiene dos respuestas alternativas de las que sólo una es correcta. Un alumno contesta al azar un examen de este tipo con tres preguntas.

a) Construya un espacio muestral adecuado a esta experiencia.

b) Calcule p(B), p(A ∩ B), p(C), p(B ∪ C), siendo A, B y C los siguientes sucesos:

A = "El alumno contesta correctamente la primera pregunta"

B = "El alumno contesta correctamente dos de las tres preguntas"

C = "El alumno contesta correctamente las tres preguntas".

Solución

Vamos a designa por **a** el acierto, es decir contestar correctamente una pregunta y por **f** el fallo, el dedir su contrario.

El espacio muestral tiene 8 elementos:

E = {(aaa), (aaf), (afa), (aff), (faa), (faf), (ffa), (fff)}

p(B) = 4/8 = 1/2; p(A ∩ B) = 3/8; p(C) = 1/8; p(B ∪ C) = p(B) = 1/2, pues C ⊂ B

2.[6] De una baraja de 40 cartas extraemos dos cartas sin reemplazamiento. Si ambas no son espadas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea copas?.

Solución ..

Llamamos A al suceso "al extraer dos cartas al menos una sea copas sabiendo", que ninguna es espada.

Calculamos en primer lugar la de su *contrario*, A^c, es decir la del suceso de que ninguna sea copas:

Teniendo en cuenta la ***Observación 1***, podemos suponer que sólo hay 30 cartas en la baraja.

$$P(A^c) = \frac{\binom{20}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{20.19}{30.29} = \frac{38}{87} = 0{,}437 \text{ luego:}$$

P(A) = 1 - 0,437 = 0,563

Veamos otra forma de resolverlo:

Llamamos B al suceso ninguna es **espada**. Nos piden:

p(A/B)= $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, A ∩B representa el suceso alguna copa y ninguna espadas.

p(A ∩ B) = $\dfrac{\left[\binom{10}{1}\binom{20}{1}+\binom{10}{2}\right]}{\binom{40}{2}}$, p(B) = $\dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}}$; p(A/B) = $\dfrac{200+45}{\frac{30.29}{2}}$ = 0,563

3. Lanzamos un dado hasta observar por segunda vez un 6. Hallar la probabilidad de que tal cosa suceda antes del quinto lanzamiento[7].

Solución

Observar un 6 por segunda vez (antes del 5º) puede ocurrir al 2º, 3º ó 4º lanzamiento,

P(ocurra en 2º) =1/36; 6 y 6

P(ocurra en 3º) = 2. (5/6).(1/36)= 5/108; 6 6, 6 6 (dos 6 y otro número cualquiera)

[6] Propuesto en Selectividad (jun 98).

[7] Propuesto en Selectividad (Sep. 98).

P(ocurra en 4º) = 3. (25/36).(1/36) = 25/432; 6 6 (dos 6 y los otros dos nº cualesquiera 3 formas para esta situación).

P(observar un 6 por segunda vez antes del 5º lanzamiento)= 1/36 + 5/108 + 25/432 = 0,132

4. La probabilidad de que una jugadora de golf haga hoyo en un lanzamiento a una cierta distancia es 0,2. Si lo intenta 5 veces, calcular la probabilidad de que:

a) no acierte ninguna; b) acierte alguna; c) acierte 2.

Solución

a) P(5 fallos) = $(0,8)^5$; b) P(acertar alguna vez) = 1 - P(fallar todas) = 1 - $(0,8)^5$;

c) P(acierte 2) = $\binom{5}{2} 0,2^2 .0,8^3$, pues hay 10 formas de obtener 2 aciertos y e fallos.

5. Una caja contiene 5 tornillos defectuosos y 4 aceptables; otra caja contiene 4 defectuosos y 5 aceptables. Se traslada un tornillo de la primera caja a la segunda; a continuación se extrae un tornillo de la segunda caja. ¿Cuál es la probabilidad de que este último sea aceptable?.

Solución

Sean los sucesos :

B = "tornillo sacado últimamente sea aceptable"

A_1 = "tornillo pasado de la 1ª a la 2ª caja sea aceptable"

A_2 = "tornillo pasado de la 1ª a la 2ª caja sea defectuoso"

Tenemos que calcular p(B) = p(A_1)p(B/ A_1) + p(A_2)p(B/ A_2), luego:

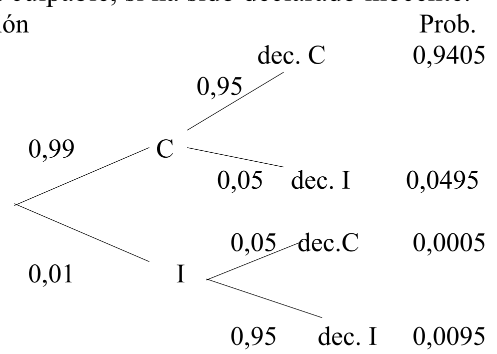
$$p(B) = \frac{4}{9}\frac{6}{10} + \frac{5}{9}\frac{5}{10} = \frac{49}{90} = 0,5444$$

6. En un cierto país, el 99% de los detenidos y sometidos a juicio son culpables del delito que se les imputa. Los jueces, al emitir veredicto, aciertan en el 95% de los casos, tanto si el acusado es culpable como inocente. Según estos datos, calcúlese la probabilidad de que:

a) un ciudadano inocente haya sido declarado culpable.

b) sea culpable, si ha sido declarado inocente.

Solución



Luego:

p(dec. C) = 0,9405 + 0,0005 =0,9410, p(dec. I) = 0, 0495 + 0,0095 = 0,0590

p(I /dec. C) = 0,0005/0,9410 = 0,00053

p(C/ dec. I) = 0,0495/0,0590 = 0, 8389

7[8]. En una ciudad el 10% de los adultos escucha la radio, el 40% lee el periódico y el 70% ve la televisión; entre los que ven la televisión, el 30% lee el periódico y el 4% escucha la radio. El 90% de los que escuchan la radio lee el periódico, siendo sólo el 2% de la población total de adultos los que leen el periódico, ven la televisión y escuchan la radio. Se elige un individuo al azar, se pide la probabilidad de:

a) De que lea el periódico, escuche la radio o vea la televisión.

b) Sabiendo que lee el periódico, la de que escuche la radio.

Solución . Llamamos T, P y R al suceso de que el individuo elgido vea la televisión, lea el periódico o escuche la radio respectivamente.

a) Tenemos: p(T) = 0,7,p(P) = 0,4 , p(R) = 0,1

p(T $\cap$ P) = p(T).p(P/T) = 0,7. 0,3 = 0,21; p(T$\cap$ R) = 0,7.0,04 =0,028;

[8] Este problema es análogo al problema 1 de la página 3.

p(P ∩ R) = 0,1.0,9 =0,09 y p(T ∩ P∩ R) = 0,02 ⇒
p(T ∪ P ∪ R) = 0,7 + 0,4 + 0,1 - 0,21 - 0,028 - 0,09 + 0,02 = 0,892
b) Aplicando la fórmula de Bayes:

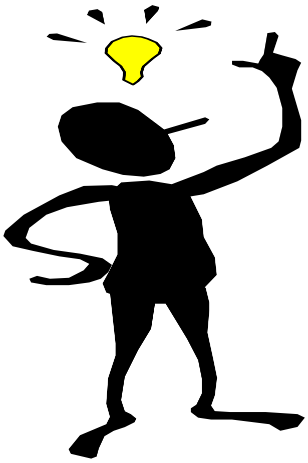
$$p(R/P) = \frac{0{,}1.0{,}9}{0{,}4} = 0{,}225$$

Problema[9] (propuesto)

Una urna contiene 8 bolas blancas y 4 bolas negras. Se extraen, con reemplazamiento, 5 bolas.

Hallar la probabilidad de que alguna sea blanca.

Si sabemos que al menos 2 han sido blancas, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 lo sean?



Solución
a) Pasamos al complementartio:

P(ninguna sea blanca) = $\left(\frac{4}{12}\right)^5$, luego

$$\text{P(todas blancas)} = 1 - \left(\frac{4}{12}\right)^5 = 0{,}996$$

b) Aplicando la fórmula de Bayes

$$\text{p(5 blanca/al menos dos son blancas)} = \frac{p(\text{las 5 sean blancas})}{\text{1 - p(0 blancas) - p(1 blancas)} - \text{p(2 blancas)}}$$

$$\frac{p(\text{las 5 sean blancas})}{\text{p(3 blancas)} + \text{p(4 blancas)} + \text{p(8 blancas)}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5\frac{2^4}{3^5} + 10\frac{2^3}{3^5}} = \frac{1}{6}$$

---

[9] Propuesto en selectividad (septiembre 99)

Actividades

1. Una urna contiene tres bolas rojas y dos verdes y otra contiene dos bolas rojas y tres verdes. Se toma, al azar, una bola de cada urna. Escribe el espacio muestral[10]. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean del mismo color?¿ y la de que sean de distinto color?.

2. Lanzamos una moneda hasta observar la segunda cara. ¿Cuál es la probabilidad de observar dos cruces antes de que se observe la segunda cara.

3. Se lanza un dado 6 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener puntuación par en los lanzamientos impares e impar en los lanzamientos pares?

4. De una baraja de 40 cartas se extraen dos de ellas a la vez. Calcula la probabilidad de que:
a) las dos sean reyes
b) Una sea copas y otra el rey de espadas.
c) al menos una sea copas.

5. Un 65% de los alumnos de un centro han aprobado Matemáticas, un 70% ha aprobado Filosofía, y un 53% ha aprobado ambas materias. Si se elige al azar un estudiante, calcúlese la probabilidad de que:

a) haya aprobado al menos una de las dos materias.
b) haya suspendido ambas materias
c) Si aprobó Matemáticas ¿Cuál es la probabilidad de haber aprobado filosifía?

6. Un jugador de tenis tiene una probabilidad de ganar una partida 0,25. si juega cuatro partidas calcula la probabilidad de ganar más de la mitad.

7. Suponiendo que la riqueza es independiente del sexo, calcular:
a) Las probabilidades que faltan en la tabla

	Rico/a	Pobre	Total
Hombre	—	—	0,607
Mujer	—	—	0,393
	0,002	—	

b) La probabilidad de que sabiendo que una persona no es pobre que sea hombre.
c) La probabilidad de que una persona sea rica o mujer.

8. ¿Cuál esd la probabilidad de que en un grupo de cinco cartas de una baraja española se presenten dos reyes?.

9. Un aparato está formado por dos partes A y B. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,06 y la probabilidad de un defecto en B es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?

10. Se lanzan 6 bolas en 3 cajas de modo que cualqiera tenga la misma probabilidad de caer en cualquier caja. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cajas queden ocupadas?

[10] En este espacio muestral no se cumple el postulado de indiferencia.

Soluciones de las actividades

1. E = {(R, R), (R, V), (V,R), (V;V)}.

p(R,R) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$, p(R,V) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

p(V,R) = $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$, p(V,V) = $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$

p(mismo color) = 12/25; p(mismo color) = 13/25.

2. Los casos en que esto ocurre son: CXX ó XX ó XCX, que son incompatibles. por lo tanto la probabilidad de su **unión** , (A), es la suma de sus probabilidades.

P(A)= 1/8 + 1/4 + 1/8 = 4/8 = 1/2

3. Sea A el suceso obtener impar en los lanzamientos pares y par en los impares. Como son independientes se tendrá: p(A) = $\left(\frac{3}{6}\right)^6$ = 1/64

4. a) P(2R) = $\frac{4}{40}\frac{3}{39}=\frac{1}{130}$; b) P(Copas y Rey de espadas)=2!$\frac{10}{40}\frac{1}{39}=\frac{1}{78}$;

c) p(ninguna copas) = $\frac{3}{4}\frac{29}{39}=\frac{87}{156}$ $\Rightarrow$ p(al menos una copa) = $1-\frac{87}{156}=\frac{69}{156}$

5. Designamos por M el suceso aprobar Matemáticas y por F el de aprobar Filosofía.

a) p(M$\cup$F) = 0,65 + 0,70 - 0,53 = 0,82; b) p($M^c \cap F^c$) = 1- 0,82 = 0,18

c) p(F/M) = $\frac{0{,}53}{0{,}65}$ = 0,815

6. Se pide la probabilidad de ganar 3 ó 4 partidas.

p(ganar 3)=$\frac{4!}{3!1!}(0{,}25)^3(0{,}75) = 4(0{,}25)^3(0{,}75)$, p(ganar 4)= $(0{,}25)^4$

Sumando estos resultados se tendrá la probabilidad pedida.

7. a)

	Rico/a	Pobre	Total
Hombre	0,001214	0,605786	0,607
Mujer	0,000786	0,374214	0,393
	0,002	0,98	1

b) Como son independientes p(H/ R) = 0,607

c) p(R $\cup$ M) = 0,002 + 0,393 - 0,000786 = 0,394214

8. Casos posibles $\binom{40}{5}$; casos favorables $\binom{4}{2}\binom{36}{3}$ $\Rightarrow$ **p=** $\frac{\binom{4}{2}\binom{36}{3}}{\binom{40}{5}}$

9. p =0,94.0,93 = 0,8742

10. Supongamos que la probabilidad de que una bola caiga fuera de una caja es nula, entonces la probabilidad de que una bola caiga en una determinada caja es 1/3. Llamemos a las cajas **a, b** y **c**.

Sea A el suceso que no caiga ninguna bola en la caja **a.**

" B " " **b**.

" C " " **c**.

El suceso A $\cup$B $\cup$ C es el de que al menos una caja quede vacía. La probabilidad pedida es la del suceso **contrario**. Vamos a aplicar la fórmula [**1**].

p(A) = p(B) = p(C) = $(2/3)^6$ y p(A $\cap$ B) = p(B $\cap$C) = p(A $\cap$ C) = $(1/3)^6$. Luego

p(A $\cup$B $\cup$ C) = $3(2/3)^6 - 3(1/3)^6$ = 63/243, y por lo tanto **p = 180/243 = 20/2**

Cuestiones

1. Si A y B son sucesos de un cierto experimento aleatorio, ¿puede ser $p(A) + p(B) > 1$?. Razonar la respuesta.

2. Si A y B son dos sucesos tales que $p(A) = 1/5$ $p(B) = 3/4$ y $p(A \cap B) = 3/20$, entonces podemos asegurar:

a) $A \subset B$, pues $p(A) < p(B)$.

b) A y B son independientes.

c) $A \cup B$ es el suceso seguro.

d) $p(A \cup B) = 4/5$

Razonar la respuesta correcta.

3. Demostrar que si A y B son independientes se cumple:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).p(A^c) = p(A).p(B^c) + p(B)$$

4. Si sabemos que $p(A) = 0{,}2$, $p(B) = 0{,}3$ y $p(A \cup B) = 0{,}4$,

a) ¿Son A y B independientes?.

b) ¿Son A y B incompatibles?.

Razonar las respuestas.

5. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = p(A \cap B)$.

¿Cuánto valen $p(A - B)$ y $p(B - A)$?

Si $p(A \cup B) = 1/2$, Cuánto valen $p(A)$ y $p(B)$?

6. En una baraja hemos suprimido varias cartas. Entre las que quedan se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas:

p(Copa) = 0,3, p(As) = 0,15, p(carta que no sea ni copa ni as) = 0,6

¿Está entre ellas el as de copas?. En caso afirmativo halla su probabilidad.