III) INTERPOLACIÓN

INTRODUCCIÓN

En numerosos fenómenos de la naturaleza observamos una cierta regularidad en la forma de producirse, esto nos permite sacar conclusiones de la marcha de un fenómeno en situaciones que no hemos medido directamente.

La **interpolación** consiste en hallar un dato dentro de un intervalo en el que conocemos los valores en los extremos.

La **extrapolación** consiste en hallar un dato fuera del intervalo conocido, pero debe tenerse en cuenta que esté próximo a uno de sus extremos, pues en otro caso no es muy fiable el resultado obtenido.

1. *Planteamiento general*

El problema general de la interpolación se nos presenta cuando nos dan una función de la cual solo conocemos una serie de puntos de la misma:

$$(x_o, y_o), (x_1, y_1), \ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)$$

y se pide hallar el valor de un punto x (intermedio de x_0 y x_n) de esta función.

El de la extrapolación cuando el punto que queremos considerar está a la derecha de x_n o a la izquierda de x_o.

Se desea, por tanto *encontrar una función cuya gráfica pase por esos puntos* y que nos sirva para ***estimar*** los valores deseados.

El tratamiento para ambos problemas es similar se utilizarán los polinomios “interpoladores”, pero en el caso de la extrapolación el punto debe estar muy próximo a uno de los extremos.

2. *Interpolación. Elección de la interpolación más adecuada.*

Consideremos una función de la cual solo conocemos una serie de puntos de la misma:

$$(x_o, y_o), (x_1, y_1), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n) \qquad [1]$$

Deseamos encontrar la expresión analítica de dicha función para poder estudiarla en otros puntos.

Ahora bien, por n+1 puntos pasan infinitas funciones, ¿con cuál de ellas nos quedamos? Lo más lógico es recurrir a la más sencilla. La familia de funciones más sencillas es la de los polinomios, por tanto buscaremos el polinomio de menor grado que pase por los n+1 puntos dados.

La función polinómica de menor grado que pasa por los puntos [1] es en principio de grado n: $y= a_n x^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_o$

Y se obtiene resolviendo el sistema de n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas (sistema que tiene solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes es de Vandermonde y por lo tanto distinto de cero)

Se le llama **polinomio interpolador** correspondiente a esos puntos. Una vez obtenida su expresión dando valores en él se pueden encontrar nuevos puntos de la función. Los resultados obtenidos son naturalmente *estimaciones aproximadas*.

La interpolación se dirá **lineal** cuando sólo se tomen dos puntos y **cuadrática** cuando se tomen tres.

En este tema nos limitaremos a estos dos tipos de interpolación.

Ejemplo 1. De una función conocemos tres puntos (-3, 5), (1, -1) y (3, 11). ¿qué podemos decir de esa función cuando x=0 y cuando x=10?

Solución

Calculamos el polinomio interpolador que será de 2º grado

$y= ax^2 + bx + c$, que pase por los tres puntos ,

Resolviendo el sistema que se nos plantea nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 2 & 2 \le x \le a \end{cases}$$

y= P(x)=

Cuando x=0, P(0)=-13/4; si x=10, P(10)=527/4

El primero, una interpolación, es probablemente una buena aproximación del valor de la función desconocida, en el punto 0.

Sin embargo, el valor 527/4 es probable que se parezca poco al valor de la función en el punto 10, pues es el resultado de una extrapolación muy lejana.

No se pueden dar **reglas generales** para decidir cuál es la interpolación más adecuada, pues no siempre al aumentar el grado del polinomio aumenta la precisión en la estimación.

Depende siempre del caso concreto a estudiar. A veces la naturaleza del problema nos da una idea de cuál es la interpolación (o extrapolación) más conveniente. Por ejemplo si los incrementos de la función son proporcionales a los de la variable independiente (o casi proporcionales) podremos usar la interpolación lineal.

Ejercicio 1. Se conoce la población de cierto municipio, para el 31 de diciembre en los años que se indican:

años	1950	1960	1970	1980	1990
Población	827	1058	1304	1582	1836

Efectuar una representación gráfica y observar cuál sería en este caso la interpolación más conveniente.

Ejercicio 2. Un investigador ha observado que la vida media de una bacteria varía con la temperatura media en la siguiente forma

Temperatura	6º	9º	12º	15º	16º
Vida media	104,2	140,4	181,7	220,2	257,6

Se pide:

a) Efectuar una representación gráfica, tomando en abscisas las temperatura s y en ordenadas la vida media.

b) Calcular las variaciones de la función "vida media" al variar la temperatura.

c) ¿Los resultados anteriores indican que la vida media varía linealmente con la temperatura?

d) En caso afirmativo, mediante interpolación lineal, obtener la vida media para las siguientes temperaturas: 8º, 10,2º, 14,5º y 15,3º

Ejercicio 3. En una facultad universitaria de nueva creación el número de alumnos matriculados evolucionó de la siguiente forma:

Años	1	2	3	4	5
Alumnos matriculados	425	640	941	2790	6123

a) Efectuar una representación gráfica tomando como abscisas los años y como ordenadas el nº de alumnos.

b) ¿Hubiese sido una "buena idea" obtener el número de alumnos matriculados en el tercer curso mediante la interpolación lineal?

c) ¿Cuál crees que sería la más conveniente?

3. *Interpolación lineal*

Como dijimos, cuando las variaciones de la función son proporcionales (o casi proporcionales) a los de la variable independiente se puede admitir que dicha función es lineal y usar para estimar los valores la interpolación lineal..

Sean dos puntos (x_o, y_o), (x_1, y_1), la interpolación lineal consiste en hallar una estimación del valor y, para un valor x tal que $x_0<x<x_1$. Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es: $$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

obtenemos la fórmula de la interpolación lineal.

$$\boxed{y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

Ejercicio 4.El número de turistas entrados en España en el período 1980-1995 siguió la siguiente tendencia:

Año	1980	1985	1990	1995
Millones de turistas	24,1	30,1	38,0	43,2

a) Expresar la función definida a trozos que daría, por interpolación lineal, el número de turistas en cada año intermedio. Calcular el número de turistas en 1986

b) Hallar la previsión para el año 1988 (suponiendo fuese lineal).

4. *La interpolación cuadrática. Fórmula de Lagrange*

Cuando el polinomio que conviene es de 2º grado la interpolación recibe el nombre de cuadrática. El polinomio interpolador es único, luego como se encuentre da igual., sin embargo, a veces los cálculos son muy laboriosos y es preferible utilizar un método que otro. A la vista de los datos se decide.

En el ejemplo 1 se da el método de resolver el sistema para encontrar los valores que determinan a la función cuadrática (a, b y c)

También podemos utilizar la expresión del polinomio interpolador así:

$y = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)(x-x_1)$, con lo que la búsqueda de los coeficientes es muy sencilla.

Lagrange (1736-1813) dio una manera **simplificada** de calcular los polinomios interpoladores de grado n Para el caso de un polinomio de 2º grado que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Que es la fórmula de Lagrange para n=2.

Ejercicio 5. El número en miles de habitantes, de una determinada ciudad ha evolucionado según la siguiente tabla:

Años	*1997*	*1998*	*1999*
Población	53	71	91

Sabiendo que dicha población se ajusta a una función cuadrática, calcular la población que tenía la ciudad en 1995 y que tendrá en el año 2000.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El número de turistas que visitaron España en el periodo 1975-1990 está reflejado en la siguiente tabla:

Años	*1975*	*1980*	*1985*	*1990*
Millones de turistas	24,1	30,1	38,1	43,2

Calcular, utilizando un polinomio de interpolación adecuado (cuadrático, al menos), el número de turistas que visitarán España en 1995.

2. En la tabla siguiente se indica el tiempo (en días) y el peso (en gramos) de tres embriones de cierta especie animal:

Tiempo	3	5	8
Peso	8	22	73

a) Obtener el polinomio de interpolación de 2º grado correspondiente.

b) Determinar, a partir de dicho polinomio, el peso que correspondería a un embrión de 6,5 días.

3. Dada la siguiente tabla, obtener por interpolación lineal el valor de $\sqrt{0,4}$.

x	*0*	*1*	*2*
$\sqrt{x+1}$	1	1,4142	1,7321

(Sol. 0,7514)

4. De una función f(x) se conocen los valores f(1)=0, f(2)=4, f(5)=52. Hallar el correspondiente polinomio cuadrático de interpolación. Estimar el valor de la función en x=3 y en x=6. (Sol. $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, P(3)=14 y P(6)=80)

5. Obtener la ecuación de la interpolación cuadrática que pasa por los puntos A(0,4), B(1,3) y C(-1, 9). (Sol. $P(x)= 2x^2 - 3x + 4$)

6. El aumento de líneas telefónicas instaladas en España durante los tres últimos años fue:

Años	1995	1996	1997
Millones de líneas	8,457	8,882	9,640

a) ¿Es lineal el aumento producido?

b) Calcular el valor esperado en 1998 mediante una extrapolación cuadrática. (Sol. 10,731)

7. Dada la tabla de la función y = f(x)

x	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	2	-1	6	0

Calcular el error cometido cuando se calcula f(4) mediante la interpolación cuadrática, obtenida usando los otros valores de la tabla. (Sol. 23)