Ecuaciones y Sistemas[1]

Resolver una ecuación en encontrar **todas su soluciones** o llegar a la conclusión de *que no tiene ninguna.*

Ejemplo 1. a) $x^2-1=0$ tiene dos soluciones, x =1 y x =-1

b) $x^2+1=0$ es una ecuación sin soluciones en R.

c) 2x +3y = 0 tiene infinitas soluciones, (0,0), (-3,2), (3, -2)....

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando admiten la mismas soluciones. Se cumple:

- Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

Trasposición de términos. Aplicando las reglas anteriores deducimos dos reglas prácticas:

- Si un número aparece en un miembro **sumando**, se le puede pasar al otro miembro **restando.** Si esta restando pasará sumando.
- De igual manera si está **multiplicando** pasa **dividiendo** y al revés.

Esto se llama trasponer términos.

Ejemplo 2: La ecuación 5x - 1 = 2x -3 se puede escribir 3x + 2 = 0, trasponiendo términos.

Nota: El segundo miembro de la ecuación se puede considerar siempre que es 0.

Ecuaciones de primer grado

La forma general de esta ecuación es a x +b =0 con **a** $\neq$ **0**

Trasponiendo y dividiendo por **a** se llega a $x=\dfrac{-b}{a}$.

Solución que siempre existe y es única.

Ejemplo 3. a) 3x +2 =0 $\Rightarrow x=\dfrac{-2}{3}$

b) 7x + 2 = 2x -3 , si trasponemos términos, nos queda 7x –2x = -2 –3
Luego 5x = -5 de donde x = -1

Ecuaciones de segundo grado

La **forma general** de una ecuación de 2º grado es: $ax^2+bx+c=0$, donde a$\neq$ 0
La solución de esta ecuación general viene dada por la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 8. $x^2-5x+6=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\begin{cases}\dfrac{5+\sqrt{25-24}}{2}=3\\[2mm]\dfrac{5-\sqrt{25-24}}{2}=2\end{cases}$$

Observación. A $\mathbf{D}=b^2-4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación de 2º y se verifica:
Si D>0 la ecuación tiene dos soluciones conjugadas

[1] Se incluye repaso de la ESO

Si D =0 la ecuación tiene una única solución (doble)
Si D <0 la ecuación no tiene ninguna solución real.

Ecuaciones incompletas

- **Si c =0** la ecuación se reduce a $ax^2 + bx = 0$ y sacando factor común x se tiene:

$$x(ax+b)=0\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Este tipo de ecuación siempre tiene dos soluciones.

Ejemplo 4. $3x^2-5x=0$ $\quad x(3x-5)=0\left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ 3x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

- **Si b =0** la ecuación queda $ax^2 + c = 0$ de donde $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Puede tener dos soluciones opuestas o ninguna solución, dependiendo de que el radicando sea o no positivo.

Ejemplo 5. $2x^2-\dfrac{5}{3}=0$; $\quad 2x^2=\dfrac{5}{3} \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ (dos soluciones)

Ejemplo 6. $3x^2+1=0 \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{-1}{3}}$ (no tiene ninguna solución)

Resolución "práctica" de una ecuación

Lo estudiamos con un ejemplo

Ejemplo 7. $\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{5x-1}{3}=1$

Para **resolver** la ecuación seguiremos el siguiente orden.

1º Quitar denominadores

Al multiplicar los dos miembros de una ecuación por el mínimo común múltiplo de sus denominadores, se obtiene otra ecuación equivalente a la primera, pero sin denominadores.

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad por 6, que es el m.c.m. de los denominadores.
Nos queda $\quad 3(2x-3)-2(5x-1)=6$

2º Quitar paréntesis

Se efectuarán las operaciones indicadas, utilizando la propiedad distributiva.

Quitando paréntesis $\quad 6x-9-10x+2=6$

3º Trasposición de términos

Se disponen todos los términos que llevan **x** en un miembro y los demás en el otro.

Trasponiendo términos $\quad 6x-10x = 9-2+6$

4º Reducción de términos semejantes

De este modo cada miembro de la ecuación queda con un solo término:

$$-4x = 13$$

5º. Despejar la incógnita

Se dividirá ambos miembros por el coeficiente de la incógnita (se puede hacer siempre que sea $a \neq 0$)

$$x = \frac{13}{-4} = \frac{-13}{4}$$

Observación. Dependiendo de la ecuación a resolver puede ocurrir que alguno de los pasos sea innecesario, se omite y se pasa al siguiente.

Ecuaciones de primer grado

Resuelve

1) $\frac{x-3}{5} - \frac{5x+1}{3} = 1 - x$

2) $\frac{2x+1}{3} = \frac{4-x}{6} - 2$

3) $\frac{3x-2}{3} - \frac{2-x}{5} = 3 + \frac{1-2x}{2}$

4) $\frac{x-1}{4} + 3x - \frac{x+7}{6} = \frac{4x+7}{9} + 11$

5) $\frac{(2x-4)^2}{8} = 5 + \frac{x(x+1)}{2}$

Solución.

Multiplicamos los dos miembros por 8 (es el m .c. m. de los denominadores)

$$(2x-4)^2 = 40 + 4x(x+1)$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 40 + 4x^2 + 4x$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 40 + 4x^2 + 4x$$

Reduciendo términos semejantes:

16x-4x= 40- 16 -20x =24 $\qquad x = \frac{24}{-20} = \frac{-6}{5}$ **= -1,2**

6) $(x+1)^2 - (x+2)(x-3) + \frac{5}{4}x - \frac{9}{2}x = \frac{25}{4}$

Ecuaciones de segundo grado

Resuelve las siguiente ecuaciones

1) $-6x^2 + 5x - 1 = 0$

2) $(5x-4)(2x+3) = 5$

3) $30 + 9x - 3x^2 = 0$

4) $\frac{2-x}{2} + \frac{4}{2+x} = 1$

Solución.

Multiplicamos por el M. C. M de los denominadores, que es 2(2 +x):

$$(2+x)(2-x) + 4.2 = 2(2+x)$$
$$4 - x^2 + 8 = 4 + 2x,$$

agrupando términos y organizando la ecuación

$$0 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-32)}}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$$

5) $\frac{x(2-x)}{3} + \frac{(x-1)(3-2)}{2} = 1$

6) $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x+1}{4} = 9$

7) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{40}{x^2} - 4$

Aplicaciones de las ecuaciones de 2º grado

- Ecuaciones **bicuadradas**

Ejemplo 8. La ecuación $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ es **bicuadrada** (es de 4º grado sin potencias impares).

Para resolverla se procede así:

Se hace un cambio de incógnita

$x^2 = y$

con lo cual $x^4 = y^2$

Sustituyendo en la ecuación: $y^2-5y+6=0$ que sí es de 2º grado y podemos aplicar la fórmula:

$$y = \frac{+5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Sustituyendo los valores en la expresión **$x^2 = y$, $x =$**$\pm\sqrt{y}$ obtenemos:

$x = \pm\sqrt{3}$ y $x = \pm\sqrt{2}$

En este caso la ecuación tiene 4 soluciones.

Ejercicios

Resuelve:

1) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3) $x^4 - 1 = 0$

4) $x^4 + 4x^2 = 0$

Solución.

Como es incompleta, .al igual que en las de segundo grado, sacamos factor común

$$x^2(x^2+4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ \\ x^2 + 4 = 0 \end{array} \right.$$ que tiene sólo la solución (doble) $x = 0$

5) $x^4 - 9x^2 = 0$

6) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

7) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

8) $x^2 + \frac{6}{x^2} = 5$

- Resolución de **ecuaciones irracionales**.

Ejemplo 9. $x + 2\sqrt{x-1} - 4 = 0$

Se procede de la forma siguiente:

1) Se aísla la raíz:

$$2\sqrt{x-1} = 4 - x$$

2) Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$4(x-1) = (4-x)^2 \Rightarrow 4x-4 = 16-8x+x^2$$

3) Se resuelve a ecuación de 2º grado que resulta

$x^2-12x+20=0$ $x=10$ y $x=2$ (comprobarlo)

4) Se comprueban las soluciones

Si $x=10$

$10+2\sqrt{10-1}-4=0$ 16 - 4= 0 Falso, no es solución

Si **$x=2$**

$2+2\sqrt{2-1}-4=0$ 4 - 4=0 Cierto, **si es solución**.

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

1) $\sqrt{x+2}=3$

2) $\sqrt{x+4}-2=-2x$

3) $x-\sqrt{2x-3}=1$

4) $\sqrt{3x-5}+2=x-1$

5) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

6) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$

Solución.

Aislamos una de las raíces: $\sqrt{x+4}=6-\sqrt{2x-1}$

Elevamos al cuadrado $(\sqrt{x+4})^2=\left(6-\sqrt{2x-1}\right)^2$

$$x+4=36-12\sqrt{2x-1}+2x-1$$

Volvemos a aislar la raíz que nos queda

$$12\sqrt{2x-1}=x+31$$

Elevamos al cuadrado

$$144(2x-1)=x^2+62x+961$$
$$288x-144=x^2+62x+961$$

Es decir:

$$x^2-226x+1105=0$$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{226^2 - 4.1105}}{2} = \begin{cases} \dfrac{226 + \sqrt{51076 - 4420}}{2} = \dfrac{226 + 216}{2} = 221 \\ \dfrac{226 - \sqrt{51076 - 4420}}{2} = \dfrac{226 - 216}{2} = 5 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:
x =221 **no es solución** pues

$$\sqrt{221 + 4} \neq 6 - \sqrt{442 - 1} \qquad 15 \neq 6 - 21$$

x =5 sí es solución

$$\sqrt{5 + 4} = 6 - \sqrt{2.5 - 1}$$

3=3

7) $\sqrt{7x + 1} - 1 = \sqrt{3x + 10}$

Ecuaciones de grado superior a dos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
Solución
Los divisores del término independiente son 1 y -1

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	0

Luego :

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-1)$ y las soluciones son: x =1 (doble) y x =-1

2) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

3) $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11x = 0$

4) $x^3-2x^2-9x+18$

5) $x^4-x^3-11x^2+9x+18=0$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de primer grado.

Ejemplo 10: $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ es un sistema de ***2 ecuaciones* con *dos incógnitas***

Resolver un sistema es encontrar la **solución** (o soluciones) **común** a todas ellas, o concluir que el sistema no tiene solución.
Hay tres métodos algebraicos para resolverlos:

- ✓ ***Sustitución***

Ejemplo 11. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

En la 2ª ecuación despejamos la y y la sustituimos en 1ª ecuación

y =3x; 2x +3(3x) =1 $\Rightarrow$ 11x =1

$\Rightarrow$ **x =1/11**

Una vez encontrado el valor de una de las incógnitas se sustituye (y =3x) para encontrar el valor de la otra incógnita: **y =3/11**

Observación. Este método es muy adecuado cuando el coeficiente de, al menos, una de las incógnitas es **1**.

- ✓ ***Igualación***

Ejemplo 12. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones $y=\dfrac{1-2x}{3}$; y =3x.

Igualando $\dfrac{1-2x}{3}=3x \Rightarrow$ 1-2x =9x $\Rightarrow$ 1= 11x $\Rightarrow$ **x =1/11**

Ahora para obtener el valor de la **y** se procede como en el caso anterior, es decir se sustituye el valor hallado en la ecuación que más convenga (en este caso en y =3x). **y** =3/11

Observación. Este método es muy adecuado cuando el coeficiente de una de las incógnitas es igual en las dos ecuaciones.

✓ *Reducción*

Ejemplo 13. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

Multiplicamos la 1ª ecuación por 2 y la 2ª por 3. (De esta forma el coeficiente de y en las dos ecuaciones es el mismo, el m.c.m.

Resulta: $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 \\ 9x-6y=0 \end{cases}$

Sumando obtenemos 13 x =2 $\Rightarrow x=\dfrac{2}{13}$

Sustituyendo el valor encontrado de **x** en la segunda ecuación:

$3\dfrac{2}{13}-2y=0$ y =3/13

Nota. A veces es más cómodo usar la reducción dos veces para encontrar el valor de la otra incógnita. (Ver ejercicio resuelto).

➢ 4º Método: Resolución gráfica.

Se dibujan en los mismos ejes las dos rectas, el punto de corte es la solución del sistema**.**

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más adecuado:

1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{5}=-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y}=5 \\ x-y=9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=3 \\ x+2y=12 \end{cases}$

Solución

Para quitar los denominadores multiplicamos por 4 la 1ª ecuación $\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=12 \\ x+2y=12 \end{cases}$

Le resolvemos por reducción doble.

Multiplicamos la 2ª ecuación por $-2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=12 \\ -2x-4y=-24 \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos una equivalente: -3y = -12⇒**y =4**

Para encontrar el valor de x, eliminamos la y, para ello multiplicando la 1ª por -2

$\begin{cases} -4x-2y=-24 \\ x+2y=12 \end{cases}$ sumando –3x= -12⇒ **x =4**

Resuélvelo gráficamente

Resolución gráfica

Resuelve gráficamente los siguientes sistemas. compruébalo analíticamente.

1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ 5x-2y=0 \end{cases}$

Problemas de aplicación

1) Calcula dos número cuya suma sea 8 y su producto 12.

2) La suma de dos número es 65 y su diferencia 23. Halla los números

3) La diferencia de dos números es 1/6. El triple del mayor menos el doble del menor es 1. Halla dichos números.

Sistemas de ecuaciones de 2º grado

Son aquellos en que al menos una de las ecuaciones es de 2º grado. Veremos con un ejemplo como proceder para obtener las soluciones

Ejemplo 14. Sea el sistema $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 22 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

En la 2ª ecuación despejamos la **y,** y la sustituimos en la 1ª

$$y = 2x-4 \Rightarrow \quad 2x^2+(2x-4)^2=22$$

$$2x^2+4x^2-16x+16=22; \quad 6x^2-16x-6=0,$$

Simplificando por 2 obtenemos: $3x^2-8x-3=0$, que es una ecuación de 2º grado completa:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-(-36)}}{6} = \begin{cases} \dfrac{8+10}{8} = 3 \\ \dfrac{8-10}{6} = \dfrac{-1}{3} \end{cases} \quad y = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{-2}{3} - 4 = \dfrac{-14}{3} \end{cases}$$

También se pueden resolver gráficamente algunos sistemas de 2º grado

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas y si es posible también gráficamente:

1) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + y = 4 \end{cases}$

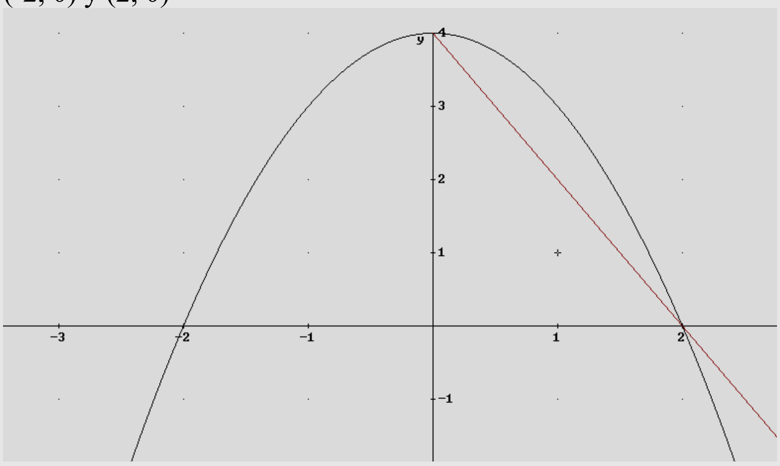
Solución

En este caso se puede resolver gráficamente. Lo haremos por tanto gráficamente como ejemplo.

La gráfica de la primera es una **recta**, de ecuación explícita; y =4-2x, que pasa por los puntos (0, 4) y (2, 0)

La gráfica de la segunda ecuación es una **parábola.**

El vértice está en el punto (0, 4) y dos puntos simétricos son los de corte con el eje de abscisas, (-2, 0) y (2, 0)



Las soluciones gráficas (0, 4) y (2, 0)

Comprobarlo resolviéndolo analíticamente.

2) $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas,

Método de Gauss

Está basado en el de reducción. Consiste en, mediante transformaciones elementales, llegar a otro escalonado de más fácil resolución.

Ejemplo 15. Resuelve el sistema $\begin{cases} y+2x+3z=-9 \\ 2y+4x+5z=-7 \\ -5y-6x-z=-1 \end{cases}$

Multiplicamos la 1ª ecuación por 2 y se la restamos a la segunda:

$$\begin{cases} y+2x+3z=-9 \\ -z=11 \\ -5y-6x-z=-1 \end{cases}$$

Permutamos las ecuaciones 2ª y 3ª:

$$\begin{cases} y+2x+3z=-9 \\ -5y-6x-z=-1 \\ -z=11 \end{cases}$$

Multiplicamos la 1ª ecuación por 5 y se la sumamos a la 2ª:

$$\begin{cases} y+2x+3z=-9 \\ 4x+14z=-46 \\ -z=11 \end{cases}$$

que es un sistema escalonado.

Hasta aquí es el método de Gauss, ya se ha conseguido un sistema **escalonado** ahora para resolverlo se procede:

z =-11, de donde

4x = -46-14(-11)$\Rightarrow$ **x=54/2**, la y la obtenemos sustituyendo estos dos valores en la ecuación 1ª ;

y =-9-54+33, **y=-30.**

La solución es: **(54/2,-30,-11)**

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas

1. $\begin{cases} x+2y-5z=4 \\ 3x-2y+\quad z=4 \\ 2x-\quad y \qquad =3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ 3x+y-7z=0 \\ x+5y-z=2 \end{cases}$

Estrategias para la resolución de Problemas.

Para resolver un problema es **conveniente** realizar cuatro fases[2]:

1ª. **Comprender** el problema.

Hay que leer el problema hasta familiarizarse con él y que podamos contestar, sin dudar, a las siguientes preguntas:

¿Cuáles son los datos? ¿cuál es la incógnita o incógnitas? ¿son las condiciones suficientes para determinar a las incógnitas? ¿son insuficientes?.. .

2ª Concebir un plan.

Determinar la relación entre los datos y la incógnitas.

De no encontrarse una relación inmediata puedes considerar problemas auxiliares.

¿Conoces problemas relacionados con éste?

¿Podrías plantear el problema de forma diferente?

¿Puedes cambiar la incógnita o los datos o ambos si fuera necesario, de tal forma que la nueva incógnita y datos estén en una relación más sencilla?...

¿Has considerado todas las nociones esenciales del problema?

....

Obtener *finalmente* **un plan** de solución.

Para nuestro caso:

Escribir la ecuación o ecuaciones que relacionan datos e incógnitas y analizar el sistema que forman.

3ª. Ejecutar el plan.

Resuelve el sistema por los métodos estudiados.

4ª. Examinar la solución obtenida.

Comprobar si las soluciones obtenidas son válidas y proceder en consecuencia.

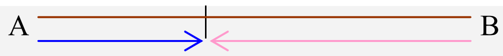
---

[2] "Cómo plantear y resolver problemas". G. Polya, Edit. Trillas

Problemas resueltos

1. Dos poblaciones A y B distan 25km. Un peatón sale de A hacia B a una velocidad de 4km/h. Simultáneamente sale de B hacia A otro peatón a 6km/h. Calcula el tiempo que tardan en encontrarse.

Solución



25km

El espacio que recorre el peatón que sale de A es: $E = v_A t = 4.t$

El espacio que recorre el peatón que sale de B es: $E = v_B t = 6t$

Cuando se encuentran habrán recorrido entre ambos los 25km

Por lo tanto: $4t + 6t = 25$

$$10\,t = 25 \Rightarrow t = 2{,}5 \text{ horas}$$

Tardan en encontrarse 2 horas y media

Se encuentran a las **12 horas 16 minutos 21 segundos**

2. Para vallar una finca rectangular de $750m^2$ se han utilizado 110m de cerca. Calcular las dimensiones de la cerca.

Solución

Llamamos **x** a la base del rectángulo, e **y** la altura.

Como la superficie es el producto de la base por la altura, entonces **x .y =750**

El perímetro es la suma de los 4 lados:

$$2x + 2y = 110$$

Es decir tenemos el sistema $\begin{cases} x.y = 750 \\ 2x + 2y = 110 \end{cases}$ De la primera ecuación se tiene y =750/x

Sustituyendo en la segunda:

$$2x + \frac{2.750}{x} = 110 \Rightarrow \quad 2x^2+1500 = 110\,x \quad \Rightarrow \quad 2x^2-110x+1500=0$$

De donde $x = \dfrac{110 \pm \sqrt{110^2 - 4.2.1500}}{4} = \dfrac{110 \pm \sqrt{12100 - 12000}}{4} = \begin{cases} \dfrac{110+10}{4} = 30 \\ \dfrac{110-10}{4} = \dfrac{45}{2} = 22{,}5 \end{cases}$

Nos da **dos** soluciones:

Si la base es x =**30** ⇒ la altura es **y** = 750/30 =**25**

Si la base es x = **22,5** ⇒ la altura es **y** =750/22,5=100/3= **33,333**..

Ambas válidas.

3. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de los hombres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

Solución

Sean:

hombres	x
mujeres	y
niños	z

Luego:

$x + y + z = 20$

$x + y = 3z$ Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$x = y + 1$

Se resuelve por reducción:

Restamos a la 1º ecuación la 2ª
$z = 20-3z \Rightarrow 4z = 20 \Rightarrow z = 5$, sustituyendo en la 2ª nos queda:
$x + y = 15$ que junto con la 3ª forman un sistema de dos ecuaciones:
$x - y = 1$
Sumando nos queda $2x = 16 \Rightarrow x = 8$, $y = 7$
Resuélvelo por el método de Gauss

Problemas propuestos

1. Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20kg por defectuosas y vende el resto aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?

2. El perímetro de un jardín rectangular es de 68 m. Si el lado mayor mide 10 m. más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?

3. Halla dos números positivos cuya suma es 20 y la suma de sus cuadrados 250.

4. Un ciclista sale por una carretera a 15km / h. Media hora después sale otro en su persecución a una velocidad de 20km/h. ¿Cuánto tardarán en alcanzarse?

5. Tres empresas aportan 2, 3 y 5 millones de euros para la comercialización de un nuevo avión. A los cinco años reparten beneficios correspondiendo a la tercera 189000 € más que a la segunda. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

6. En la primera prueba de una oposición queda eliminado el 70% de los participantes. En la segunda queda eliminado el 40% de los restantes. Si el número de personas que aprobaron los dos exámenes fue 36 ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?

7. Calcula tres números sabiendo que son consecutivos y que su suma es igual al cuádruple del menor.

8. La base de un rectángulo es 10cm más larga que la altura. Su área mide $600m^2$. Calcular las dimensiones del rectángulo.

9. Dos números son tales que el mayor menos la raíz cuadrada del menor es 22 y la suma de los números es 34. ¿Cuáles son los números.

10. Una caja mide 5cm de altura y de ancho, cinco cm. más que de largo. Su volumen es $1500cm^3$. Calcular la longitud y la anchura.

15. La diagonal de un rectángulo mide 26cm y el perímetro 68cm. Hallar los lados del rectángulo.

16. Los lados de un triángulo ABC miden 2, 3 y 4 m, respectivamente. Hállense lo lado de otro triángulo A’B’C’ que es semejante al anterior y tiene 36m de perímetro.

17. Calcula las edades de un padre y de sus dos hijos, sabiendo que entre los tres suman 99 años. Además se sabe que la edad del padre y la del hijo mayor difieren en 25 años, y que la suma de las edades de ambos hijos se diferencian en la edad el padre en 5 años.

Inecuaciones[3]

Para resolver las inecuaciones se utilizan las propiedades de las desigualdades:

1) si $a \geq b$ y $b \geq c \Rightarrow a \geq c$

2) si $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$, para todo c

3) si $a \geq b$, y $c > 0 \Rightarrow a.\,c \geq b.\,c$

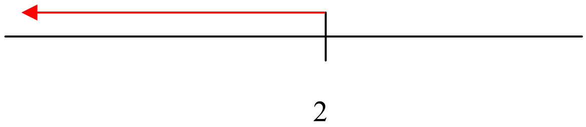
y $c < 0 \Rightarrow a\,c \leq b.\,c$

A) Lineales con una incógnita

Son de la forma $a.\,x + b \leq 0$ ($\geq$; $<$, ó $>$)

Ejemplo 1. 3x -6 <0

Solución. 3x< 6 ⇒x<2



Ejemplo 2. -2x +3> 5

Solución. -2x >5-3 =2 ⇒ -x>1 y x<-1

Haz una interpretación gráfica. -1

Ejercicios. Resuelve las siguientes inecuaciones:

1. $3x - 1 \leq 5$

2. 2x- 3 > 3x+1

B) Lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una desigualdad algebraica del tipo:

$a\,x + by + c \leq 0$ ($\geq$; $<$, ó $>$)

Sus soluciones serán los pares de números (x, y) que hagan cierta la desigualdad.

Ejemplo 3: 2x-5y <0

(1,1) es una solución, (1,0) no lo es....

Ejemplo 1: La inecuación 2x-y > x-2y+4 es equivalente a x +y-4>0 , por tanto es lineal.

Representación gráfica del conjunto solución.

Proposición. Dada una inecuación equivalente a:

$a.\,x + by + c > 0$ ó $a.\,x + by + c < 0$

el conjunto solución es uno de los semiplanos cuya frontera es la recta:

a. x + by + c =0 (la llamaremos *recta auxiliar)*

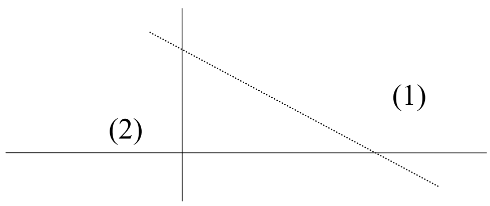
La inecuación puede escribirse para $b \neq 0$

$y > \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$ (1) $\qquad$ $y < \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$ (2)

y los puntos de la recta auxiliar verifican:

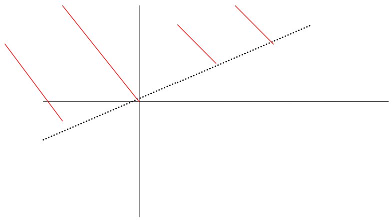
$$y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$$

Los puntos del semiplano superior verifican (1) y los del inferior verifican (2) (la demostración es inmediata).



[3] Se incluye resumen teórico

Ejemplo 4: Resolver gráficamente la inecuación: 2x-5y <0
Solución
Consideramos la recta 2x-5y=0 y la representamos en el plano



x	y
0	0
5	2

La recta divide al plano en dos semiplanos, en este caso, como la inecuación se puede escribir y > $2x/5$, la solución es el semiplano superior.

Para señalar que no esta incluida la recta en el conjunto de las soluciones se ha dibujado ésta con trazo discontinuo. Si estuviera incluida se dibujaría con trazo continuo.

Ejercicios. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales
1. 3x +y<2

2. x –y +1 ≥ 0

Sistemas de inecuaciones lineales.

*Un sistema de inecuaciones lineales es un conjunto de dos o más inecuacioness.
Resolver un sistema de inecuaciones es encontrar las soluciones comunes a todas ellas.

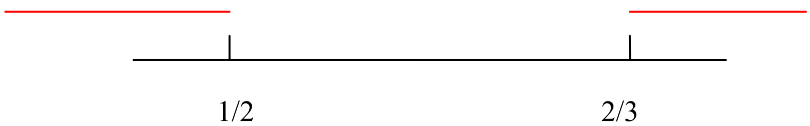
Con una incógnita

Ejemplo 5.

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x-1<0 \\ 3x-2>0 \end{cases}$

Solución.

$\begin{cases} 2x<1 \\ 3x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$



No hay ninguna solución común, el sistema no tiene soluciones.

Ejercicios. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

1. $\begin{cases} 2x+1\leq 15 \\ 2x-5\geq 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+1\leq 5 \\ x+5\geq 2 \end{cases}$

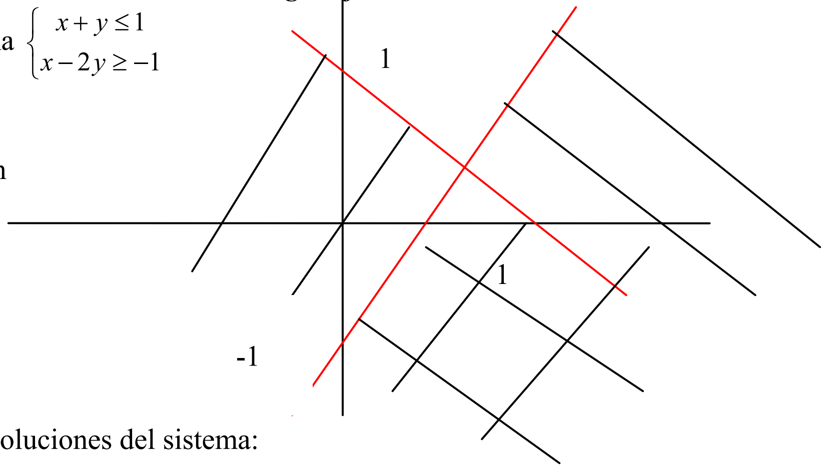
Con dos incógnitas

Se utilizará la representación gráfica para dar el conjunto solución de un sistema de inecuaciones (con dos incógnitas), que será la intersección de los semiplanos. La región del plano que determinan dichas intersecciones se llama ***región factible.***

Ejemplo 6. Resuelve el sistema $\begin{cases} x+y \le 1 \\ x-2y \ge -1 \end{cases}$

Solución.

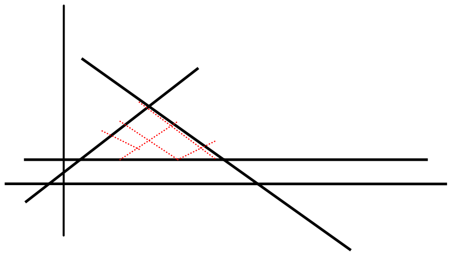
La solución es donde se cruzan



Ejemplo 7

Representar gráficamente las soluciones del sistema:

y ≤ x + 1000
x + y ≤3000
y ≥1000
x ≥0



Ejercicios. Resuelve los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x-y \le -1 \\ x+2y \ge 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x-y \le 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+y \le 3 \end{cases}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas:

1. $3^{2-x}=9$

Solución

$3^{2-x}=3^2$, igualamos los exponentes $2-x=2 \Rightarrow x=0$

2. $5^{2x+1}=1$

3. $3^{2-x^2}=3$

4. $5^{2x-1}=25^{x^2-\frac{1}{4}}$

5. $4^{2x+1}=(0{,}5)^{3x+5}$

6. $2^x+2^{x+2}=20$

Solución

$2^x+4.2^x=20 \Rightarrow 5.2^x=20 \Rightarrow 2^x=4$, $x=2$

7. $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$.

8. $3^{2x+2}-28.3^x+3=0$

Solución

$9.3^{2x}-28.3^x+3=0$, hacemos $3^x=t$ y nos queda:

$9t^2-28t+3=0$, ecuación de 2º grado completa

$$t=\frac{28\pm\sqrt{28^2-108}}{18}=\begin{cases}\dfrac{28-26}{18}=\dfrac{1}{9}\\[2mm]\dfrac{28+26}{18}=3\end{cases}$$

de donde $3^x=1/9 \Rightarrow x=-2$ ó $3^x=1 \Rightarrow x=1$

9. $4^x-3.2^{x+1}+8=0$. Indicación: $4^x=2^{2x}$

10. $4^x-5.2^x+4=0$

11. $2^{x-1}+4^{x-3}=5$

12. $5^{2x}-30.5^x+125=0$

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2 (2x-1)=3$

Solución

$(2x-1)=2^3 \Rightarrow 2x=9,\ x=9/2$

2. $\ln (x^2-5x+7)=0$

3. $\log (6x-6)=\log 2 +\log (2x+3)$

Solución

$\log(6x-6) =\log 2 (2x+3)$

$6x-6 =4x +6 \Rightarrow 2x =12,\ x =6$

4.$\log (3x+1)-\log (2x-3)=1-\log 5$

5. $\log_x(20x-4)-\log_x 25=2$

6. $2\log x =1+ \log (x-\frac{8}{5})$

Resuelve los siguientes sistemas:

1.a) $\begin{cases} 3^x+3^y=90 \\ 3^{x+y}=729 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=22 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\log x-2\log y=1 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

Actividades propuestas

1. Encontrar x en cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $\log_x 729 = 6$

b) $2^{\frac{x-3}{x+6}+1} = 4^{\frac{x+2}{x-3}}$

c) $81^x = 9^2 . 3^{3x}$

d) $9^x - 6 . 3^{x+1} + 81 = 0$

e) $5^{1-x} + 5^x = 6$

f) $2.7^{1-x} + 7^x = 9$

2. Calcula utilizando las propiedades de las funciones logarítmicas:

a) log 0'0001

b) $3^{\log_3 25}$

c) $\log_2 10 - \log_2 5$

d) $\log_2 \sqrt{0{,}32.(0{,}16)^3}$

e) $\log_2 \sqrt[3]{\left(\frac{175}{28}\right)^2}$

3. Resuelve:

a) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{c} \log x - \log y = 2 \\ \dfrac{x}{y^2} = 25 \end{array}\right\}$

c) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 5 \\ \log x - \log y^2 = -3 \end{cases}$