## 4. *Función derivada. Reglas de derivación. Cálculo de derivadas*

*La función derivada*

La función que a cada que a cada x le hace corresponder $f'(x)$ se llama la función derivada de f y se denota por **f´**.

*Tabla de derivadas de algunas funciones elementales*

1) $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
2) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
3) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
5) $f(x) = e^x \Rightarrow = e^x$
6) $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
7) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$

*Reglas de derivación*

Si f y g son funciones derivables en **a** entonces f +g y f.g son derivables en **a** y se verifica:

-$(f+g)' = f'(a) + g'(a)$
-$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + g'(a).f(a)$
Además si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en **a** y se verifica

-$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a') - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

Ejercicio 6. Calcula la derivada de:

a) $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 2)$; b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + \sqrt{x}}$

c) $h(x) = \tan\ x$; d) $g(x) = \dfrac{senx}{senx + \dfrac{1}{senx}}$

Ejercicio 7. Estudia en qué puntos no son derivables las siguientes funciones, razonando la respuesta:

a) f(x)= $\begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

b) y = $|x^2 - 7|$

c) g(x)=$\begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ 3x - 2 & x > 0 \end{cases}$

**Observación.** Si f ´ se puede derivar en su dominio se puede llegar a la función (f ´)´= f ´´ , que se llama derivada segunda, y f ´´´, f ´ $^{V}$ que se dice son las derivadas sucesivas de f.

Ejercicio 8. Calcula las derivadas sucesivas de a) f(x)= $e^x$; b) g(x) = $\dfrac{1}{x}$; c) h(x)= sen x.

*Regla de la cadena*

Si g es derivable en **a** y f es derivable en g(a) entonces f∘g es derivable en **a** y se verifica:

(f∘g)´(a) = f´(g(a)).g´(a)

Que se llama la regla de la cadena (derivada de la función compuesta o derivada de la función de función)

*Derivación logarítmica*

Como aplicación de la regla de la cadena se tiene, si $y = \ln f(x) \Rightarrow$ $y = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, y de aquí se llega al método de la derivación logarítmica.

Ejemplo 4. Consideremos la función y = $x^x$, si tomamos logaritmos en ambos lados se sigue:

$\ln y = \ln x^x = x \ln x$, y derivando los dos miembros de la igualdad

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + \dfrac{1}{x}.x = \ln x + 1 \Rightarrow$ $y' = x^x(\ln x + 1)$

*Derivada de la función inversa*

Es otra aplicación de la regla de la cadena.

Como $f \circ f^{-1} = I$, se tiene $(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$, luego despejando $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1})'(x)$,

Ejemplo 5. Consideremos la función y =arc tg x $\Rightarrow$ **x = tg y**, y derivando x ' = 1 +$\text{tg}^2$y, de donde:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejercicio 9. Calcula la derivada de $y = arcsenx$

*Tabla de derivadas* (propuesta como ejercicio)

Ejercicio 10. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) f(x)= $\dfrac{(3x-1)}{3x^2+1}$; b) $g(x) = e^{senx}$;

c) y = $\dfrac{sen(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$; d) h(x) =$\cos^3(x^2-2)$;

e) y =$e^{\text{arc tg } x}$; f) j(x) =arc sen(x + $3x^2$)

g) y = $arctg\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; h) k(x) =$(x^2+1)^{\cos x}$;

j) y = $\ln \sqrt[3]{\dfrac{(x^2+7)^4}{x^4+1}}$; k) y = $\dfrac{senx^2 sen^2 x}{1+senx}$;