Matrices

INTRODUCCIÓN

En el tema anterior hemos usado la ***"matriz ampliada"*** de un sistema, para manejar, con más comodidad, los números que intervienen en un sistema lineal. En otros muchos problemas es útil disponer y manejar un conjunto de números dispuestos en *filas* y *columnas*. Así es cómo se introdujo, en matemáticas, el concepto de matriz, como una disposición rectangular de números. Vienen a ser como una *ampliación del concepto de número* definiéndose para ellas operaciones como la suma y el producto[1] .

1. *Concepto de matriz. Elemento y orden de una matriz.*

Definición. Se llama matriz del tipo mxn a un conjunto de m.n números dispuestos en **m** filas y **n** columnas:

$$\begin{array}{cc} & \text{columna} \downarrow \\ \text{fila} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \end{array}$$

Se escribirá A = (a_{ij})

Se llama **orden, tipo, o dimensión** de una matriz, al tamaño **mxn.**

Ejemplo1: A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2x4, es decir, tiene dos filas y cuatro columnas.

Ejemplo 2. En un curso de 30 alumnos se han realizado cuatro evaluaciones, por lo tanto existen cuatro notas por cada alumno y los resultados se pueden disponen mediante una matriz:

$$\begin{array}{cc} & \textit{Evaluaciones} \rightarrow \\ \textit{Alumnos} \downarrow & \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n_{30,1} & n_{30,2} & n_{30,3} & n_{30,4} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 1. Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1, 1'5, 2 y 2,5 cm. con los precios respectivos siguientes:

Clavos A:	0,02	0,03	0,04	0,05	€
Clavos Q:	0,03	0,045	0,06	0,075	€
Clavos H:	0,04	0,06	0,08	0,10	€

Recoger la información en una matriz 4x3 que recoja los precios.

El conjunto de todas las matrices de orden mxn se representa $\mathcal{M}_{mxn}$.

A cada número $\mathbf{a_{ij}}$ se le llama *elemento* o término de la matriz. El primer subíndice, **y**, indica la *fila* en que se encuentra el elemento, el segundo subíndice, **j**, la columna.

Dos matrices A y B , de $\mathcal{M}_{mxn}$, son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo los i,j.

2. *Tipos de matrices*

Definiciones. La matriz se llama:

- *Matriz fila* , si tiene sólo una fila.
- *Matriz columna*, si tiene sólo una columna.
- *Matriz nula*, ***O,*** si todos sus elementos son 0.
- *Matriz traspuesta* de A y se designa A' o A^t, a la que se obtiene cambiando filas por columnas.

Ejercicio 2. Calcula la matriz traspuesta de **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- *Matriz cuadrada*, si tiene el mismo nº de filas que de columnas.

Si tiene **n** filas se dirá, simplemente, de orden **n** (en vez de nxn).
Los elementos $\mathbf{a_{ii}}$ (i=1,2...,n) forman la ***diagonal principal*** de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ .... & ..... & ... & .... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ...... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ .... & ..... & ... & .... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ...... & a_{nn} \end{pmatrix}$$ en esta matriz están indicados los elementos que fornan la **diagonal secundaria.**

•*Matriz diagonal*[1], la que todos sus elementos, excepto los de la diagonal principal, valen cero. Es decir $a_{ij} = 0$, cuando $i \neq j$.
En particular, si todos los elementos de la diagonal son **1,** se la llama **matriz identidad, I,** o unidad.
Ejercicio 3. Escribe la matriz identidad de orden 5.
• *Matriz triangular*[2] , superior si todos los elementos situados debajo de la diagonal principal son 0. Análogamente se define triangular inferior.

Ejemplo 3. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es triangular superior.

• *Matriz simétrica*[2] , si coincide con su traspuesta, es decir $a_{ij} = a_{ji}$.
Ejemplo 4. La matiz identidad es una matriz simétrica.
Ejercicio 4. Sean **A** y **B** dos matrices cuadradas de orden 3, $a_{ij} = 2i - j$, $b_{ij} = |i-j|$. Se pide:
a) Escribe A y B
b)¿son simétricas?.

3. Operaciones con matrices.

I) Suma de matrices.

Sean A= (a_{ij}) y B = (b_{ij}) dos matrices de orden mxn. Se define la matriz suma de A y B como la matriz de orden mxn dada por:

$$\boxed{\mathbf{A + B = (a_{ij} + b_{ij})}}$$

La suma de matrices, así definida, es una operación interna en el conjunto de las matrices de oren mxn, $\mathcal{M}_{m,n}$, verificándose además las siguientes:
Propiedades. Asociativa, conmutativa, elemento neutro (la matriz **O**), y elemento opuesto.[2]
Por tanto el conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$ con + es un grupo aditivo.

II) Producto de una matriz por un número

Se define el producto de la matriz A = (a_{ij}) por el número real **k** así:

$$\boxed{\mathbf{k.A = (ka_{ij})}}$$

Propiedades[3]. 1) (k + m) A = kA + mA
2) (km) A = k(mA)
3) k (A +B) = kA + kB
4) 1.A = A

[1] Tiene que ser cuadrada.
[2] Demostrar las afirmaciones como **ejercicio.**

Consecuencia: El conjunto de las matrices mxn con las operaciones suma y producto por escalares es un espacio vectorial.

III) **Producto de matrices**[3]

Se define el producto de la matriz A = (a_{ij}), de orden mxn, pr la matriz B = (b_{ij}), de orden nxp, como la matriz C= (c_{ij}) de orden mxp, obtenida así:

$$\mathbf{c_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Observación: Para que dos matrices, A y B, se puedan multiplicar tiene que ocurrir que el número de columnas de A sea igual al de filas de B

Propiedades. 1) Asociativa, es decir A(BC) = (AB)C

(A +B) C = AB +BC

Notas:

1) El producto de matrices, en general, no es conmutativo.

Ejemplo 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ luego no es conmutativo.

2) El producto de matrices tiene **divisores de cero,** es decir, podemos encontrar dos matrices no nulas cuyo producto sea la matriz nula.

Ejemplo 5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Sean A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A. B. ¿se puede verificar A.B = B.A? , razona la respuesta.
b) Calcula A.(B.C) y (A.B)C.

4. Matrices cuadradas. Matrices regulares.

Si llamamos $\mathcal{M}_n$ al conjunto de las matrices cuadradas de orden n se verifica que con las operaciones + y • , definidas anteriormente, es un anillo[4].

La **unidad** para el producto es la matriz identidad, **I.**

La simétrica para el producto, que llamaremos **inversa,** en general no existe.

Ejemplo 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ no tiene inversa[5].

Cuando una matriz A *posea inversa* diremos que es **regular** o **inversible**, y, por definición, esto ocurrira si existe otra matriz, que representaremos por A^{-1}, que verifique :

(3) $\boxed{\begin{matrix} A.\,A^{-1} = I, \\ A^{-1}.\,A = I \end{matrix}}$

Cálculo de la matriz inversa

Cuando una matriz sea regular se nos plantea el problema de cómo calcular su inversa. Hay varios métodos.

1º) Resolviendo el sistema que plantea (3).

El nº de incógnitas que tiene este sistema es $\mathbf{n^2}$**.** Se empleará para matrices de orden 2.

Ejemplo 6. Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y llamemos a la inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$.

---

[3] En general no se pueden “multiplicar “ dos matrices. Para poder definir un prodcto interno de matrices tenemos que restringirnos a las matrices cuadradas y del mismo orden.

[4] Comprobarlo como ejercicio.

[5] El sistema que se plantea al intentar encontrarla es incompatible.

Tendríamos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por definición de inversa.

de donde: $\begin{pmatrix} x & z \\ 3x+2y & 3z+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \\ 3x+2y = 0 \\ 3z+2t = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (Comprobarlo[6])

2º) Mediante transformaciones elementales[7].

Si la matiz A se somete a ciertos cambios hasta obtener **I** , sometiendo a **I** a los mismos cambios llegamos a la inversa.

Ejemplo 7. Vamos a calcular la inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cómo debemos hacer a **I** las mismas transformaciones que a A, la siguiente colocación nos ahorrará tiempo y trabajo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 2F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ por lo tanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Forma matricial de un sistema de ecuaciones

Consideremos un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas[8]. Teniendo en cuenta cómo se multiplican las matrices se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

, que se escribirá **AX =B (2)**

A = matriz de los coeficientes del sistema.

X = matriz columna de las incógnitas.

B = matriz columna de los términos independientes.

Nota: Si la matriz A es cuadrada, es decir m =n, y regular, el sistema resulta compatible determinado y X $=A^{-1}B$. Lo estudiaremos con detalle en el tema siguiente.

Ejemplo: Sea el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = -9 \\ 4x + 2y + 5z = -7 \\ 6x - 5y - z = -1 \end{cases}$, en forma matricial se escribiría:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

[6] La comprobación es **obligatoria,** independientemente del método que usemos para encontrar la inversa.

[7] Este procedimiento de obtener la inversa resulta, en general, muy poco "práctico". En el siguiente tema , determinantes, veremos el que se utiliza generalmente.

[8] Ver (1) del tema anterior.

1. Un almacén clasifica naranjas según calidades en Inferior, Media, Buena y Superior. Los precios por Kg. de cada una de estas calidades son , respectivamente, 20, 30, 50 y 80 pts. En tres días consecutivos un agricultor llevó al almacén las cantidades, en kg., que a continuación se detallan:

	Inferior	**Me-dia**	**Bue-na**	**Superior**
primer día	1000	1000	500	500
segundo día	2000	1000	1000	1500
tercer día	1000	1500	600	1300

Todos los datos que se piden a continuación deben obtenerse como resultado de operaciones con matrices.
a) ¿Cuánto cobró el primer día ?
b) ¿Cuánto recibió por el total recolectado de naranja de tipo medio y superior?

3. a)Calcular una matriz X que verifique la igualdad:

$$AX = B, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)¿ Verifica también la matriz X la igualdad XA = B ?

4. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{se pide:}$$

a) Obtener la traspuesta de A.
b) Calcular $(A-I)^2 . (A-5I)$, siendo I la matriz unidad.

5. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, hallar las traspuesta de Ay B.
Comprobar que $(A.B)^t = B^t . A^t$.

6. Halla la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación: $XA^2 + A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, siendo X una matriz de orden 2.

7. Obtener de forma razonada la matriz X que verifica AX =2B-C, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

8. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $\frac{3}{2}X + 2A = B$

9. Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular: a) la matriz P^{-1}. b) La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$